Research Paper

Two-qutrit Nonorthogonal Systems and their Entanglement Dynamics under XX Hamiltonian and DM Interaction[1]

Mehrzad Ashrafpour*[2], Hamdollah Salehi[3] and Mehdi Khanzadeh[4]

Received: 2020.03.01
Accepted: 2020.07.27

Abstract

In this work, we study entanglement dynamics in a two-qutrit system under the XX Hamiltonian, in the presence of Dzyaloshinskii-Moriya interaction and external magnetic field. Using the generalized concurrence as an entanglement measure, their entanglement dynamics are investigated by numerical computation and the appropriate graphs as a function of the parameters are depicted. The generalized concurrence measure changes for different values of interaction and non-phase coherence parameters can be investigated. It is observed that the entanglement dynamics variations range of these states is changed between maximum entanglement or no entanglement in qutrit systems, depending on the choice of the parameters involved.

keywords: *Entanglement Dynamics, Generalized Concurrence, Qutrit, Coherent State, DM Interaction*.

1 DOI: 10.22051/jap.2020.30526.1157

2 Assistant Professor, Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. (Corresponding Author). Email: mehrzadashrafpour@yahoo.com

3 Associate Professor, Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. Email: salehi_h@scu.ac.ir

4 M.Sc. in Physics, Assistant Professor, Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. Email: mehdi779046@hotmail.co

فصلنامهٔ علمی فیزیک کاربردی ایران، دانشگاه الزهرا
سال دهم، پیاپی ۲۰، بهار ۱۳۹۹

مقالهٔ پژوهشی

دینامیک درهم‌تنیدگی حالت‌های غیرمتعامد دو کیوتریتی تحت هامیلتونی XX و برهمکنش اسپین-مدار [1]

مهرزاد اشرف‌پور*[2]، حمداله صالحی[3] و مهدی خانزاده[4]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۰۷

چکیده

در این کار دینامیک درهم‌تنیدگی حالت‌های همدوس دو کیوتریتی تحت هامیلتونی XX و برهمکنش دزیالوشینسکی-موریا و میدان مغناطیسی خارجی بررسی می‌شود. با استفاده از سنجهٔ درهم‌تنیدگی کانکرنس تعمیم‌یافته، با محاسبات عددی و رسم نمودارهایی بر حسب پارامترهای تأثیرگذار، دینامیک درهم‌تنیدگی آن‌ها تجزیه و تحلیل می‌شود. تغییرات سنجهٔ کانکرنس تعمیم‌یافته به ازای پارامترهای همدوسی غیر همفاز و اندرکنشی بررسی شد. دامنهٔ تغییرات دینامیک درهم‌تنیدگی حالت معرفی‌شده به ازای پارامترهای تاثیرگذار در بازهٔ صفر تا بیشینهٔ درهم‌تنیدگی برای سامانه‌های کیوتریتی نوسان می‌کند.

واژگان کلیدی: *دینامیک درهم‌تنیدگی، کانکرنس تعمیم‌یافته، کیوتریت، حالت همدوس، برهم‌کنش اسپین-مدار.*

---

1 DOI: 10.22051/jap.2020.30526.1157

۲ استادیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. (نویسندهٔ مسئول).
mehrzadashrafpour@yahoo.com

۳ دانشیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. salehi_h@scu.ac.ir

۴ دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران.
mehdi779046@hotmail.com

۱. مقدمه

بعد از انتشار مقالهٔ EPR،درهم‌تنیدگی از اهمیت ویژه‌ای در مکانیک کوانتومی برخوردار شده و نقش مهمی در فرایند اطلاعات کوانتومی بازی می‌کند [۱ـ۵]. سامانه‌های حالت جامد به‌ویژه زنجیره‌های اسپینی یکی از گزینه‌های مناسب برای پردازش اطلاعات کوانتومی است. زنجیره‌های اسپینی را می‌توان به عنوان کانال برای ارتباطات کوانتومی کوتاه‌برد استفاده کرد [۶]. در سال‌های اخیر، در زمینهٔ سامانهٔ سه‌بعدی (کیوتریت) نیز تحقیقاتی انجام شده است. این بررسی‌ها نشان می‌دهد که این‌گونه سامانه‌ها برتری‌هایی بر سامانه‌های دوبعدی دارند. از جملهٔ این برتری‌ها می‌توان وجود امنیت بیشتر در کدگذاری کوانتومی و قابلیت‌های بیشتر درگاه‌های کوانتومی و پروتکل‌های کوانتومی ایمن‌تر و بهتر را نام برد [۷ـ۹]. در این مقاله، دینامیک درهم‌تنیدگی برهم‌نهی‌هایی از حالت‌های همدوس اسپینی کیوتریتی که تحت هامیلتونی XX در حضور اندرکنش اسپین‌ـمدار (DM) و میدان خارجی هستند، بررسی می‌شود. برعکس برهمکنش هایزنبرگ که تمایل به موازی کردن اسپین‌های همسایه دارد، اثر برهم‌کنش DM در اسپین‌ها به گونه‌ای است که آن‌ها را در راستای عمود بر یکدیگر می‌چرخاند، که این چرخش باعث افزایش درهم‌تنیدگی در زنجیره‌های اسپینی می‌شود. این موضوع نه تنها برای اثر فرومغناطیس ضعیف بلکه در بررسی آرایش اسپینی در آثار پادفرومغناطیس هم اهمیت دارد [۱۰، ۱۱]. با بررسی و محاسبات سنجهٔ آی‌ـکانکرنس مربوط به هر حالت، پارامترهای اندرکنشی و همدوسی تأثیرگذار در تحول زمانی درهم‌تنیدگی هر یک از حالت‌های معرفی‌شده در این کار تجزیه و تحلیل می‌شود.

۲. توصیف مدل

سنجهٔ به‌کاررفته در این پژوهش کانکرنس تعمیم‌یافته است [۱۲، ۱۳]، که برای یک سامانهٔ دوجزئی شامل اجزاء A و B به صورت زیر تعریف می‌شود

$$IC(|\psi^{AB}\rangle) = \sqrt{2(1 - \mathrm{tr}(\mathrm{tr_B}|\psi^{AB}\rangle\langle\psi^{AB}|)^2)} \qquad (۱)$$

با نوشن حالت چنین سامانه‌ای به صورت

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j}\,|i^A, j^B\rangle \qquad (۲)$$

می‌توان IC را به‌صورت زیر بازنویسی کرد [۱۴]،

$$IC(|\psi^{AB}\rangle) = \ 2\sqrt{\sum_{i'>i,j'>j}\left|c_{i,j}c_{i',j'} - c_{i',j}c_{i,j'}\right|^2} \qquad (۳)$$

کانکرنس تعمیم‌یافته که در رابطهٔ (۳) تعریف شده است، به عنوان معیار درهم‌تنیدگی سامانه‌های دوجزئی با ابعاد دلخواه استفاده می‌شود. مقدار آن برای حالت جدائی‌پذیر برابر صفر و برای حالت‌های کیوتری با بیشینهٔ درهم‌تنیدگی برابر $\sqrt{4/3}$ است.

علاوه بر این، مدل استفاده‌شده در این مقاله، مدل هایزنبرگ XX است. مدل هایزنبرگ XX در حضور اندرکنش اسپین‌ـمدار (DM) و میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$H = \sum_i J\left(S_i^x S_{i+1}^x + S_i^y S_{i+1}^y\right) + B.\sum_i \vec{S}_i + \vec{D}.(\vec{S}_i \times \vec{S}_{i+1}) \qquad (۴)$$

که در آن، J پارامتر جفت‌شدگی بین نزدیک‌ترین همسایه‌ها در زنجیرهٔ اسپینی و جمع روی i نشان‌دهندهٔ تعداد اسپین‌ها و جملهٔ آخر برهم‌کنش جفت شدگی اسپین‌ـمدار است [۱۵ــ۱۷]. با انتخاب $\vec{D} = D_z\,\hat{z}$ و $B = B\hat{z}$ برای زنجیرهٔ دو کیوتریتی خواهیم داشت:

$$H = J[(S^x \otimes S^x) + (S^y \otimes S^y) + B(S_1^z \otimes I + I \otimes S_2^z) + iD_z(S^x \otimes S^y - S^y \otimes S^x)] \qquad (۵)$$

که در آن S^x، S^y و S^z عملگرهای اسپین واحد هستند.

هم‌چنین می‌توان حالت‌های همدوس اسپینی رادکلیف را به صورت زیر تعریف کرد [۱۸]،

$$|\alpha, j\rangle = \frac{1}{(1+|\alpha|^2)^j}\sum_{m=-j}^{j} \binom{2j}{m+j}^{\frac{1}{2}} \alpha^{j+m}|j, m\rangle \qquad (۶)$$

که در آن، $|j, m\rangle$ ویژ بردارهای عملگر تکانهٔ زاویه‌ای $\hat{J}_z$ و $\hat{J}^2$ با ویژه‌مقادیر m و $j(j+1)$ هستند. برای $j = 1$ داریم:

$$|\alpha, 1\rangle = \frac{1}{(1+|\alpha|^2)}\left(|-1\rangle + \sqrt{2}\,\alpha\,|0\rangle + \alpha^2|1\rangle\right) =: |\alpha\rangle \qquad (۷)$$

که در آن داریم

$$|1, 0\rangle =: |0\rangle, |1, 1\rangle =: |1\rangle, |1, -1\rangle =: |-1\rangle \qquad (۸)$$

یکی از ساده‌ترین حالت‌های خالص درهم‌تنیدهٔ دو کیوتریتی را که از برهم‌نهی حالت‌های جدایی‌پذیر همدوس ناشی شده است، می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(\cos\theta\,|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle + e^{i\varphi}\sin\theta\,|\alpha'\rangle \otimes |\beta'\rangle) \qquad (۹)$$

که در آن، با غیر هم‌فاز در نظر گرفتن پارامترهای همدوسی جملهٔ دوم در برهم‌نهی بالا $\left(\alpha' = -i\alpha, \beta' = -i\beta\right)$ و همچنین برای کاهش پارامترهای مجهول با قرار دادن $\alpha = \beta$ در نهایت در فضای هیلبرت $H_1 \otimes H_2$ برای $|\psi\rangle$ داریم:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}(1+|\alpha|^2)^2}\begin{pmatrix} \alpha^4(\cos\theta + e^{i\varphi}\sin\theta) \\ \sqrt{2}\alpha^3(\cos\theta + i\,e^{i\varphi}\sin\theta) \\ \alpha^2(\cos\theta - e^{i\varphi}\sin\theta) \\ \sqrt{2}\,\alpha^3(\cos\theta + i\sqrt{2}\,\alpha^3 e^{i\varphi}\sin\theta) \\ 2\alpha^2(\cos\theta - e^{i\varphi}\sin\theta) \\ \sqrt{2}\alpha(\cos\theta - i\,e^{i\varphi}\sin\theta) \\ \alpha^2(\cos\theta - e^{i\varphi}\sin\theta) \\ \sqrt{2}\,\alpha(\cos\theta - i\,e^{i\varphi}\sin\theta) \\ (\cos\theta + e^{i\varphi}\sin\theta) \end{pmatrix} \qquad (10)$$

در رابطهٔ (۱۰)، N ضریب بهنجارش است و به صورت زیر محاسبه می‌شود،

$$N = \frac{1}{(1+|\alpha|^2)^4}[(\cos^2\theta + sin^2\theta + \cos 2\theta\cos\varphi) + 4\alpha^2(1+\sin 2\theta\sin\varphi) + 5\alpha^4(1-\sin 2\theta\cos\varphi) + \alpha^4(1-\sin 2\theta\ cos\varphi) + 4\alpha^6(1-\sin 2\theta\sin\varphi) + \alpha^8(1+\sin 2\theta\cos\varphi) \tag{۱۱}$$

با اثر عملگر تحول زمانی، حالت وابسته به زمان به‌صورت زیر به‌دست می‌آید،

$$|\psi(t)\rangle = U|\psi\rangle \tag{۱۲}$$

که در آن، $U = e^{-iHt}$ و H در رابطهٔ (۵) تعریف شده است. اکنون می‌توان حالت تحول‌یافتهٔ زمانی $\langle\psi|$، یعنی $\langle\ (t)\psi|$ را، به دست آورد:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}(1+|\alpha|^2)^2}\begin{pmatrix} \alpha^4(\cos\theta + e^{i\varphi}\sin\theta)e^{-iBt} \\ \sqrt{2}\alpha^3(\cos\theta + i e^{i\varphi}\sin\theta)e^{-\frac{iBt}{2}} + \sqrt{2}\alpha^3(\cos\theta + i\sqrt{2}\alpha^3 e^{i\varphi}\sin\theta)e^{(-iJ+D_z)t} \\ 2\alpha^2(\cos\theta - e^{i\varphi}\sin\theta)e^{(-iJ+D_z)t} \\ \sqrt{2}\alpha^3(\cos\theta + i e^{i\varphi}\sin\theta)e^{-(iJ+D_z)t} + \sqrt{2}\alpha^3(\cos\theta + i\sqrt{2}\alpha^3 e^{i\varphi}\sin\theta)e^{-\frac{iBt}{2}} \\ \alpha^2(\cos\theta - e^{i\varphi}\sin\theta)e^{-(iJ+D_z)t} + \alpha^2(\cos\theta - e^{i\varphi}\sin\theta)e^{(-iJ+D_z)t} \\ \sqrt{2}\alpha(\cos\theta - i e^{i\varphi}\sin\theta)e^{\frac{iBt}{2}} + \sqrt{2}\alpha(\cos\theta - i e^{i\varphi}\sin\theta)e^{(-iJ+D_z)t} \\ 2\alpha^2(\cos\theta - e^{i\varphi}\sin\theta)e^{-(iJ+D_z)t} \\ \sqrt{2}\alpha(\cos\theta - i e^{i\varphi}\sin\theta)e^{-(iJ+D_z)t} + \sqrt{2}\alpha(\cos\theta - i e^{i\varphi}\sin\theta)e^{\frac{iBt}{2}} \\ (\cos\theta + e^{i\varphi}\sin\theta)e^{iBt} \end{pmatrix} \tag{۱۳}$$

با استفاده از رابطهٔ (۱۳) و محاسبهٔ $c_{i,j}$های معرفی‌شده در رابطهٔ (۳) و جایگذاری رابطهٔ (۱۱) در آن، می‌توان آی-کانکرنس را برای حالت تحول‌یافته تحت هامیلتونی معرفی‌شده با رابطهٔ (۵) محاسبه کرد.

۳. نتایج

الف. بررسی تحول زمانی درهم‌تنیدگی

در ابتدا، برای رابطهٔ (۹) به ازای مقادیر حقیقی α، α'، β و β' با بیشینه‌سازی بیشینهٔ آی-کانکرنس برابر 1.154579963 است (که البته کمتر از $\sqrt{4/3}$ یعنی بیشینهٔ مقدار آی-کانکرنس برای کیوتریت‌های کاملاً درهم‌تنیده است) و به ازای مقادیر زیر حاصل می‌شود:

$$\alpha = 3.532156924\,, \beta = 1.148824352\,, \alpha' = 0.8703574747\,, \beta' = 0.2829832198\,,$$
$$\theta = 0.02189286263, \phi = -0.0004427410911\,,$$
$$j = 2.572762964\,,\ D_z = 0.9646244345$$

هم‌چنین، با فرض $\left(\alpha' = -i\alpha, \beta' = -i\beta\right)$، بیشینهٔ آی-کانکرنس برابر 1.1180339631 به دست می‌آید و به ازای مقادیر زیر حاصل می‌شود:

$\alpha = 54.37159935326909\ , \beta = -0.000018246662752784085$
$\theta = 0.04302901950985002, \phi = -1.5727047105935013$
$j = 0.33720521305431295, D_z = 0.9999789309980838$

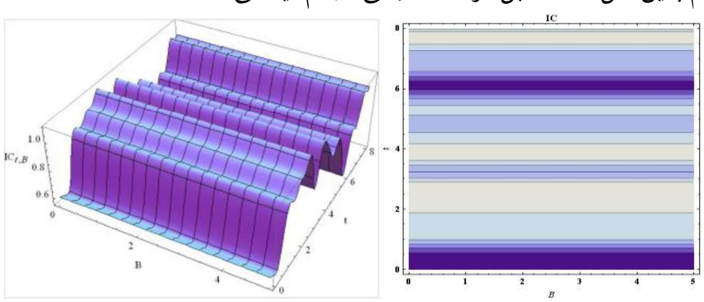
اکنون با فرض $\alpha = \beta$ که سبب ایجاد حالت تحول‌یافتهٔ بیان‌شده در معادلهٔ (۱۳) شد و به دست آوردن کانکرنس تعمیم‌یافته برای این حالت، با بیشینه‌سازی روی کانکرنس تعمیم‌یافتهٔ مربوط به حالت معرفی‌شده در رابطهٔ (۱۳) بیشینهٔ آن برابر 1.14895426 است، که به ازای مقادیر زیر به دست می‌آید:

$\alpha = -0.8608674558787428\ , \theta = -1.8871161074734208$
$\phi = 1.0667391496404794\ , j = 1.463573473502911$
$D_z = 1.646201481301577 \times 10^{-7}$

کمترین مقدار آی-کانکرنس نیز با کمینه‌سازی روی کانکرنس مربوط به حالت معرفی‌شده در رابطهٔ (۱۳) برابر صفر است، که به ازای مقادیر زیر حاصل می‌شود:

$\alpha = -3.809540517999054 \times 10^{-10}, \theta = 0.5166558356475567$
$\phi = -0.5291027394545363, j = 1.6964156181263952$
$D_z = 0.6110707954006921$

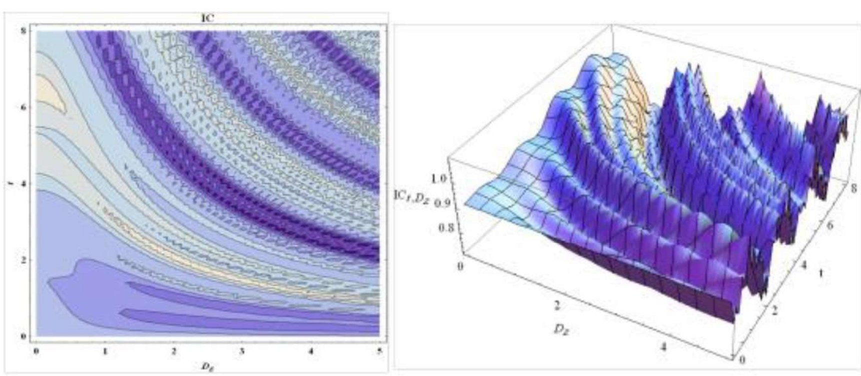
اکنون اثر میدان B را در درهم‌تنیدگی سامانه بررسی می‌کنیم. در شکل (۱) نمودار آی-کانکرنس بر حسب B و t و با جایگذاری $\phi = 0, D_z = j = 1$ و $\theta = -\pi/4, \alpha = 1$ و نمودار پربندی آن رسم شده است. درهم‌تنیدگی با شروع زمان افزایشی است اما در ادامه کم و زیاد می‌شود و این مجموعهٔ فرینه‌ها با زمان تکرار می‌شود. همان طور که مشاهده می‌کنید دامنهٔ تغییرات سنجه در بازهٔ ۰/۶ تا مقدار بیشینه برای یک سامانهٔ کیوتریتی است و مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی مشاهده نمی‌شود. در ادامه، در پارامتر برهم‌نهی $\theta = -\pi/4$ و ثابت‌هایی که در بالا انتخاب شده بود تحول سامانه بررسی و برای این پارامتر برهم‌نهی دامنهٔ تغییرات سنجهٔ کانکرنس تعمیم‌یافته کوچک‌تر از حالت قبل شده و در بازهٔ ۰/۹ تا مقدار بیشینه سنجه برای سامانه‌های کیوتریتی تغییر می‌کند و هم‌چنین مثل حالت قبل مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی مشاهده نشد.



شکل ۱ نمودار آی-کانکرنس بر حسب (B,t) و به ازای $\phi = 0, D_z = j = 1$ و $\theta = -\pi/4, \alpha = 1$.

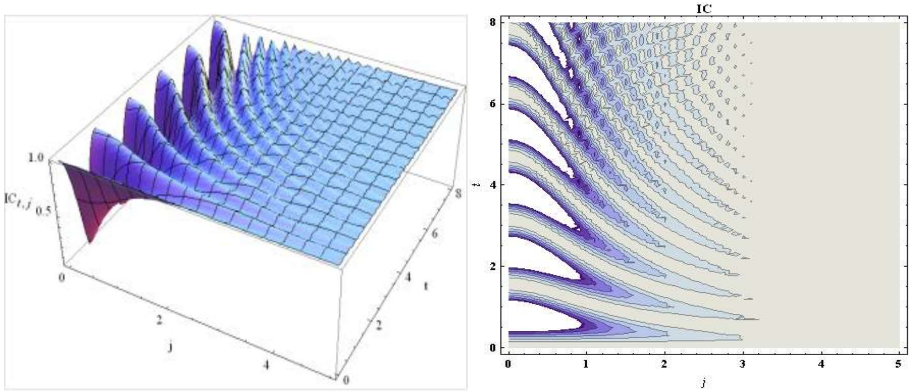
و نمودار پربندی آن.

در شکل(۲) نمودار آی-کانکرنس بر حسب D z و t و نمودار پربندی آن رسم شده است. مطابق انتظار، با افزایش D z، آی-کانکرنس افزایش می‌یابد زیرا با توجه به ویژگی‌های اثر دزیالوشنسکی-موریا، این اثر درون‌ساختاری باعث افزایش همبستگی‌های اجزاء تشکیل‌دهندهٔ سامانه می‌شود. همان طور که در این شکل مشاهده می‌کنید، تغییرات سنجهٔ کانکرنس تعمیم‌یافته در بازهٔ ۰/۷ تا بیشینهٔ درهم‌تنیدگی سامانه‌های کیوتریتی در حال نوسان است. مطابق این شکل برای D_z / j های کوچک مقدار سنجه، در ابتدای تحول شروع به افزایش می‌کند و دامنهٔ تغییرات آن در بازهٔ ۰/۹تا مقدار بیشینهٔ سنجه برای سامانه‌های کیوتریتی است. اما برای مقادیر بزرگ D_z / j در شروع تحول مقدار درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد و دامنهٔ تغییرات آن در بازهٔ ۰/۷تا مقدار بیشینهٔ سنجه برای سامانه‌های کیوتریتی نوسان می‌کند. بررسی‌های انجام‌شده نشان می‌دهد که هر چه از پارامتر همدوسی بیشینه‌کننده به ازای ثابت‌های درنظرگرفته‌شده برای نمودار (۲)، دور شویم (برای $\alpha > 1$ یا $\alpha < 1$) بازهٔ تغییرات درهم‌تنیدگی سامانهٔ مورد مطالعه افزایش می‌یابد.



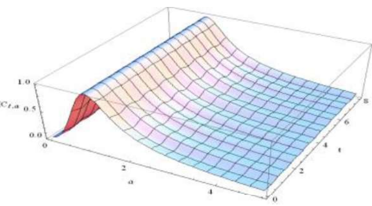
شکل۲ آی-کانکرنس بر حسب D z و t به ازای $\phi = \frac{\pi}{4}, B = j = 1$ و $\theta = \pi / 4, \alpha = 1$ و نمودار پربندی آن.

برای بررسی چگونگی تأثیر پارامتر تبادلی j در شکل(۳)، نمودار آی-کانکرنس بر حسب j و t به ازای ثابت‌های $\phi = \pi, B = D_z = 1$ و $\theta = \pi / 4, \alpha = 0.05$ و نمودار پربندی آن رسم شده است. افزایش j ابتدا باعث افزایش درهم‌تنیدگی و در ادامه تغییرات آن با گذشت زمان به سمت ثابت شدن می‌رود.



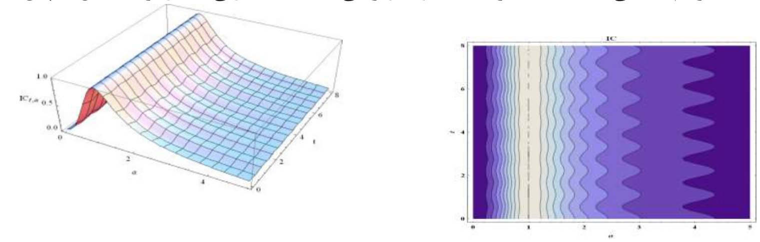
شکل۳ نمودار آی-کانکرنس بر حسب j و t به ازای $B = D_z = 1$ ، $\phi = \pi$ و $\theta = \pi / 4, \alpha = 0.05$ و نمودار پربندی آن.

شکل(۴) نمودار آی-کانکرنس بر حسب (α, t) و به ازای $\theta = \pi / 4, \phi = 0, B = D_z = j = 1$ را نشان می‌دهد.



شکل۴ نمودار آی-کانکرنس بر حسب (α, t) به ازای $\theta = \pi / 4, \phi = 0, B = D_z = j = 1$.

مطابق انتظار، بیشینهٔ آی-کانکرنس با گذشت زمان به ازای مقدار مشخص $\alpha = 1$ برابر یک است، که وابسته به زمان نیست. با دور شدن از پارامتر همدوسی بیشینه‌کنندهٔ $\alpha = 1$ مقدار درهم‌تنیدگی کاهش و با گذشت زمان در دامنه‌های کوچکی نوسان می‌کند. درشکل(۵)، نمودار آی-کانکرنس برحسب (α, t) به ازای $B = D_z = j = 1$ و $\theta = -\pi / 4, \phi = \pi$ و نمودار پربندی آن نیز نشان داده شده است. همانطور که در شکل‌های (۴) و (۵) می‌بینید، تغییر پارامتر برهم‌نهی θ و ϕ به اندازهٔ $\Delta\theta = \pi$ و $\Delta\phi = \pi$ هیچ تغییری در دینامیک درهم‌تنیدگی حالت معرفی‌شده در این کار ایجاد نمی‌کند. زیرا با توجه به رابطهٔ (۹) تغییری در برهم‌نهی حالت‌های همدوس معرفی شده ایجاد نمی‌کند.



شکل۵ نمودار آی-کانکرنس بر حسب (α,t) به ازای $(\theta=-\pi/4,\phi=\pi,B=D_z=j=1)$ و نمودارپربندی آن.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، دینامیک درهم‌تنیدگی برهم‌نهی از حالت‌های همدوس دو کیوتریتی با پارامترهای همدوسی غیر هم فاز در حضور برهم‌کنش DM و میدان مغناطیسی بررسی شد. دینامیک درهم‌تنیدگی حالت معرفی‌شده در این کار را به‌صورت توابعی از متغیرهای ذیربط بررسی و برای این برهم‌نهی، بیشترین میانگین IC در $\alpha=1$ به‌دست آمد؛ با دور شدن از αهای بیشینه‌کننده در هر جهتی میانگین IC کاهش می‌یابد. با فرض تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت **در تک تک اجزاء سامانه، مشاهده شد که** افزایش میدان در یک زمان معین تأثیری در میزان درهم‌تنیدگی ندارد. بنابراین، حضور میدان خارجی هیچ گونه تغییری در درهم‌تنیدگی کل سامانه نخواهد گذاشت. هم‌چنین، تأثیر میدان‌های داخلی در درهم‌تنیدگی نشان داد که با تغییر D_z درهم‌تنیدگی سامانه به صورت نوسانی در بازۀ کمینه و بیشینۀ سنجۀ استفاده شده در این کار تغییر و مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی مشاهده نمی‌شود و افزایش D_z میانگین درهم‌تنیدگی را در یک بازۀ زمانی کاهش می‌دهد.

۵. تقدیر و تشکر

این تحقیق توسط دانشگاه شهید چمران اهواز ، ایران [Grant No. Scu.Sp98.479] پشتیبانی شد.

منابع

[1] Audretsch J., *Entangled World: The Fascination of Quantum Information and Computation*, WILLY-VCH, Verlag GmbH, (2006).

[2] Jafarpour M. and Ashrafpour M., "An Entanglement Study of Superposition of Qutrit Spin-Coherent States"; *Journal of Sciences* **22**, No.2 ,165-169(2011).

[3] Sabour A., Jafarpour M.and Ashrafpour M., "Dynamics of localizable entanglement in a qutrit chain with Dzyaloshinskii-Moriya interaction", *Quantum Inf. Process*. **12**, 1287-1297(2013).

[4] Jafarpour M.and Sabour A., "A useful strong lower bound on two-qubit concurrence", *Quantum Inf. Process*, DOI 10.1007/s11128-011-0288-0 (2011).

[5] Naji A. and Jafarpour M., “Squeezing and entanglement in multi-qutrit systems”, *Quantum Inf. Process.* DOI 10.1007/s11128-013-0574-0 (2013).
[6] S. Bose, “Quantum Communication through an Unmodulated Spin Chain”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 207901(2003).
[7] Cerf N. J., Bourennane M., A. Karlsson, and N. Gisin, “Security of quantum key distribution using d-Level systems”, *Phys. Rev. Lett* **88**, 127902 (2002).
[8] Durt T., Cerf N. J., Gisin N., and Zukowski M., “Security of quantum key distribution with entangled qutrits”, *Phys. Rev. A* 67, 012311 (2003).
[9] Jafarpour M. and Ashrafpour M., “Entanglement dynamic of a two-qutrit system under DM intraction and the relevance of the inetial state”, *Quantum Inf. Process.* **12**, 761-772 (2012).
[10] Anderson P. W., “Antiferromagnetism theory of superexchange interaction”, *Phys. Rev*. **79**, 350 (1950).
[11] Aristov D. N, Maleyev S. V., “Spin chirality induced by the Dzyaloshinskii- Moriya interaction and polarized neutron scattering”, *Phys. Rev. B* **62**, R751-R754 (2000).
[12] Rungta P., Buzek V., Caves C. M., Hillery M., and Milburn G. J., “Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions”, *Phys. Rev. A* **64**, 042315 (2001).
[13] Rungta P., Caves C. M., “I-concurrence and tangle for isotropic states”, *arXiv*: quant-ph/0208002v1 (2002).
[14] Huang Y., Qiu D., “Concurrence vectors of multipartite states based on coefficient matrices”, *Quantum Inf. Process.* **11**, 235-234(2011).
[15] Dzialoshinski I., “A Thermodynamic theory of weak ferromagnetism of antiferromagnetics”, *J. Phys. Chem. Solid* **4**, 241-255(1958).
[16] Moriya T., “New mechanism of anisotropic superexchange interaction”, *Phys. Rev. Lett* **4**, 228-230 (1960).
[17] Moriya T., “Anisotropic Superexchange Interaction and Weak Ferromagnetism”, *Phys. Rev.* 120, 91–98(1960).
[18] Radcliffe J. M., “Some properties of coherent spin states”, *J. Phys. A* **4**,313(1971).