

Research Paper

# Numerical Solutions to the Grad–Shafranov Equation for Studying Plasma Equilibrium of Alvand Tokamak<sup>1</sup>

Chapar Rasouli<sup>\*2</sup> and Banafsheh Pourshahab<sup>3</sup>

Received: 2022.12.27

Revised: 2023.02.12

Accepted: 2023.03.07

## Abstract

Alvand tokamak is a small-sized research tokamak for magnetically confined plasma studies. The plasma cross-section of this tokamak is circular, and its simpler structure compared to tokamaks with an elongated cross-section allows for more fundamental physics research. One of the important topics in the stability of tokamak plasma and increasing the confinement time is the study of plasma equilibrium according to the geometry and boundary conditions of the tokamak. In this research, the Grad-Shafranov equilibrium equation for Alvand tokamak geometry was investigated and analyzed numerically. The data obtained from the calculations showed that for a plasma current of about 30 kA and a vertical field coil, a current of 1400 A, the lowest aspect ratio for the plasma cross section is obtained, which will be equal to 4.2. Plasma production with this aspect ratio leads to the presence of plasma in the entire area allowed by the limiters and thus there will be the largest possible volume of plasma in the tokamak chamber.

**Keywords:** *Alvand Tokamak, Plasma Equilibrium, Grad-Shafranov Equation, Numerical Solution.*

---

<sup>1</sup> DOI: 10.22051/ijap.2023.42420.1308

<sup>2</sup>Assistant Professor, Plasma and nuclear fusion research school, nuclear science and technology research institute (NSTRI), Tehran, Iran. (Corresponding Author). Email: chapar.rasouli@gmail.com

<sup>3</sup>Assistant Professor, Plasma and nuclear fusion research school, nuclear science and technology research institute (NSTRI), Tehran, Iran. Email: bpourshahab@gmail.com



## حل عددی معادله گراد-شافرانی برای مطالعه تعادل

### پلاسمای توکامک الوند<sup>۱</sup>

چاپار رسولی\*<sup>۲</sup> و بنفشه پورشهاب<sup>۳</sup>

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۰۶

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۱۱/۲۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۱۶

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران

دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا

سال سیزدهم، پیاپی ۳۴، پاییز ۱۴۰۲

صص ۱۲۵ - ۱۳۹

#### چکیده:

توکامک الوند یک توکامک اندازه کوچک پژوهشی برای مطالعات پلاسمای محصورشده مغناطیسی است. سطح مقطع پلاسمای این توکامک دایروی بوده و ساده تر بودن ساختار آن نسبت به توکامک‌های با سطح مقطع کشیده امکان پژوهش‌های فیزیکی بنیادی تری را با استفاده از آن فراهم می‌سازد. یکی از مباحث مهم در پایداری پلاسمای توکامک و افزایش زمان محصورسازی، مطالعه تعادل پلاسمای با توجه به هندسه و شرایط مرزی توکامک می‌باشد. در این پژوهش معادله تعادل گراد-شافرانی برای هندسه توکامک الوند به روش عددی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت. داده‌های بدست آمده از محاسبات نشان داد که برای جریان پلاسمای در حدود ۳۰ کیلوآمپر و جریان پیچه میدان عمودی ۱۴۰۰ آمپر کمترین نسبت منظر برای سطح مقطع پلاسمای بدست می‌آید که برابر با ۴/۲ خواهد بود. تولید پلاسمایی با این نسبت منظر منجر به حضور پلاسمای در کل ناحیه مجاز توسط محدودکننده‌ها شده و بدین ترتیب بیشترین حجم پلاسمای ممکن در توکامک وجود خواهد داشت.

**واژگان کلیدی:** توکامک الوند، تعادل پلاسمای، معادله گراد-شافرانی، حل عددی.

<sup>۱</sup> DOI: 10.22051/ijap.2023.42420.1308

<sup>۲</sup> استادیار، پژوهشکده پلاسمای و گداخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، تهران، ایران. (نویسنده مسئول). Email: chapar.rasouli@gmail.com

<sup>۳</sup> استادیار، پژوهشکده پلاسمای و گداخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، تهران، ایران. Email: bpourshahab@gmail.com



## ۱. مقدمه

در حال حاضر اغلب پژوهشگران، گداخت هسته‌ای هدایت شده را به عنوان بهترین راه حل در مقابل بحران انرژی به حساب می‌آورند. این راکتورها دارای مزایای مهمی هستند که از آن جمله می‌توان به عدم تولید پسماندهای رادیواکتیو در مقایسه با راکتورهای شکافت، ایمنی ذاتی در مقابل سوانح هسته‌ای و پایین بودن خطرات بیولوژیکی اشاره نمود. ایجاد محیط پلاسما، کنترل و نگهداری آن، افزایش دما و غیره به صورتی که واکنش‌های گداخت را امکان‌پذیر سازد و در نهایت رسیدن به انرژی، برنامه پژوهشی آزمایشگاه‌ها و مراکز پژوهشی گداخت هسته‌ای است. لازم به یادآوری است که گداخت محصورسازی مغناطیسی<sup>۱</sup> و گداخت محصورسازی لختی<sup>۲</sup> (لیزری) دو رهیافت مهم برای رسیدن به انرژی از راه واکنش‌های گداخت هسته‌ای هستند. در این میان تاکنون ماشین توکامک<sup>۳</sup> موفق‌ترین روش دستیابی به انرژی گداخت هسته‌ای از راه محصورسازی مغناطیسی پلاسما در آرایش چنبره‌ای را فراهم ساخته است. توکامک دستگاه چنبره‌ای محصورسازی مغناطیسی پلاسماست که در آن پلاسما توسط میدان‌های مغناطیسی چنبره‌ای<sup>۴</sup> و قطبی<sup>۵</sup> محصور می‌شود و به منظور مهار نیروی بدست آمده از فشار پلاسمای داغ از پیکربندی‌های ویژه میدان‌های مغناطیسی استفاده می‌شود که قسمتی از این میدان‌های مغناطیسی در اثر جریان خود پلاسما تولید می‌شود [۱].

در مبحث تعادل پلاسمای توکامک دو مفهوم پایه وجود دارد: اول شکل سطح مقطع پلاسما و دوم مکان ستون پلاسما در داخل محفظه خلاء، که هر دو به وسیله میدان‌های مغناطیسی بدست آمده از جریان سیم‌پیچ‌های نصب شده در داخل و خارج از محفظه خلاء، قابل هدایت و تغییر هستند [۲]. در پژوهش‌های گداخت هسته‌ای توکامک‌هایی که سطح مقطع کشیده<sup>۶</sup> یا D شکل دارند نسبت به توکامک‌هایی که سطح مقطع دایروی دارند از جایگاه بالاتری برخوردار هستند. در این توکامک‌ها اعمال نیروهای بدست آمده از پیچ‌های میدان مغناطیسی خارجی برای ایجاد کشیدگی پلاسما، ناپایداری مکان عمودی ستون پلاسما را تشدید می‌کند. بنابراین باید یک مصالحه بین دو مسئله کشیدگی و تعادل وجود داشته باشد که این امر فقط با استفاده از سیستم هدایت حلقه بسته انجام‌پذیر خواهد بود [۳]. همه توکامک‌ها دارای سه قسمت اصلی هستند که

<sup>1</sup> Magnetic Confinement Fusion

<sup>2</sup> Inertial Confinement Fusion

<sup>3</sup> Tokamak

<sup>4</sup> Toroidal

<sup>5</sup> Poloidal

<sup>6</sup> Elongated Cross Section



بیشتر سبب وقوع محصورسازی، گرمایش اولیه، هدایت مکان و شکل پلازما می‌شوند. این سه قسمت شامل پیچه مولد میدان چنبره‌ای، پیچه گرمایش اهمی پلازما و پیچه‌های مولد میدان قطبی می‌باشند.

عموما در توکامک‌ها پلاسمای تولید شده در راستای افقی ناپایدار بوده و ستون پلازما تمایل به افزایش شعاع دارد، همچنین در صورتی که از پیچه‌های میدان مغناطیسی شکل‌دهی<sup>1</sup> برای کشیدن ستون پلازما در راستای عمودی استفاده کنیم، ناپایداری دیگری نیز به ناپایداری افقی پلازما اضافه می‌گردد که تمایل به جابجایی مکان ستون پلازما در راستای عمودی دارد. این دو ناپایداری اصلی‌ترین انواع ناپایداری‌های پلازما در توکامک‌ها هستند. برای جبران این ناپایداری‌ها پیچه‌های مغناطیسی دیگری به ساختار توکامک اضافه می‌شوند که مکان و شکل پلاسمای تولید شده را پایدار سازند. برای پلاسمایی که توسط میدان مغناطیسی ناشی از پیچه‌های خارجی یا میدان مغناطیسی ناشی از جریان‌های القا شده در یک پوسته رسانا به تعادل رسیده است، می‌توان رابطه زیر را بکار برد. در چنین پلاسمایی نیروی ناشی از فشار پلازما در تمامی نقاط با نیروی بدست آمده از میدان مغناطیسی در تعادل است.

$$\nabla p = \vec{J} \times \vec{B} \quad (1)$$

در رابطه ۱،  $\vec{J}$  چگالی جریان و  $\vec{B}$  میدان مغناطیسی بدست آمده از پلازما و پیچه‌های میدان مغناطیسی خارجی است. در صورتی که این معادله با دو معادله دوم ( $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ) و چهارم ( $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ ) ماکسول ترکیب گردد و با فرض اینکه کل سیستم حول زاویه چنبره‌ای تقارن داشته باشد، یک معادله اسکالر و دو بعدی تولید می‌شود که بیانگر تعادل پلازما در توکامک است. این رابطه، معادله گراد شافرانف<sup>۲</sup> [۴] نامیده شده و به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -R \mu_0 J \phi = -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi} - \mu_0^2 F \frac{dF}{d\psi} \quad (2)$$

در رابطه فوق، تابع  $\psi$  شار مغناطیسی<sup>۳</sup> قطبی گذرنده بین محور چنبره و شعاع  $R$ ، فشار پلازما و  $F = \frac{RB\phi}{\mu_0}$  جریان کل قطبی است که بین محور اصلی چنبره و شعاع  $R$  برقرار است. معادله گراد-شافرانف را می‌توان هم به صورت تحلیلی (برای هندسه‌های بسیار ساده و ویژه) و هم به صورت عددی (برای هندسه‌های حقیقی) حل کرد. به عنوان مثال سفرون<sup>۴</sup> یک راه حل تحلیلی توسعه یافته

<sup>1</sup> Shaping

<sup>2</sup> Grad-Shafranov Equation

<sup>3</sup> Magnetic flux

<sup>4</sup> Cefron



را برای معادله گراد- شافرانف ارائه می کند که در مورد توکامک های استاندارد، توکامک های کروی، اسفرومک ها<sup>۱</sup> و پیکربندی های معکوس میدانی<sup>۲</sup> قابل استفاده است [۵]. همچنین در راه حل تحلیلی، رامیرز<sup>۳</sup> به بحث و بررسی کاملی در این زمینه پرداخته است که چگونه آزادی در انتخاب پارامترها و تعداد عبارت ها در یک راه حل سری برای معادله همگن بر تعادل به دست آمده تأثیر می گذارد [۶]. افزون بر این، دو خانواده از راه حل های تحلیلی معادله گراد- شافرانوف با تعیین بالاترین وابستگی چند جمله ای چگالی جریان پلاسما به تابع شار  $\Psi$  در منبع [۷] ارائه شده اند، به گونه ای که معادله گراد- شافرانوف به یک معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی تبدیل شود [۷]. حل معادله گراد- شافرانف در هندسه حقیقی فقط با روش عددی امکان پذیر است. در سال های اخیر حرکت به سمت مش های نامنظم برای روند حل، مورد توجه بوده است. چرا که استفاده از مش بندی های نامنظم نظیر نوشتار اختلاف محدود با مش غیرهمگن<sup>۴</sup>، سبب می شود که هندسه های پیچیده به راحتی با روند عددی قابل حل باشند [۸]. همچنین، استفاده از روش های عددی بدون مش حل معادله گراد- شافرانف را در دو و سه بعد آسان نموده و منجر به جواب های دقیقی می گردد [۹]. اما در مورد حل عددی نیز نکاتی باید مورد توجه قرار گیرد تا هم نتایج بدست آمده از محاسبات در آزمایش ها و طراحی ها قابل استفاده باشد و هم انجام محاسبات در یک زمان معقول و با دقت معقول امکان پذیر باشد. انجام محاسبات عددی برای حل این معادله، بسته به تعریف مساله، هم از نظر روش محاسبه و هم از نظر شرایط مرزی نسبت به حل تحلیلی متفاوت است [۱۰-۱۲].

توکامک الوند یک توکامک اندازه کوچک بوده که توسط پژوهشگران ایرانی ساخته شده است. این توکامک دارای محفظه چنبره ای با سطح مقطع دایروی، با شعاع کوچک ۱۲/۶ سانتی متر و شعاع بزرگ ۴۵/۵ سانتی متر می باشد. میدان مغناطیسی این توکامک تا ۰/۹ تسلا قابل افزایش است و جریان پلاسمایی تا حدود ۳۰ کیلو آمپر تولید می کند. مطابق با طراحی دستگاه بیشینه دمای الکترون ها تا حدود ۱۰۰ الکترون ولت و دمای یون ها تا ۵۰ الکترون ولت قابل افزایش است. دو دیافراگم دایروی به فاصله زاویه ای تقریبی ۱۸۰ درجه چنبره ای و به شعاع حدود ۱۱ سانتی متر به عنوان محدود کننده<sup>۵</sup> عمل کرده و از برخورد ستون پلاسما با دیواره داخلی محفظه خلاء جلوگیری می کنند. شکل

<sup>1</sup> Spheromak

<sup>2</sup> field reversed configurations

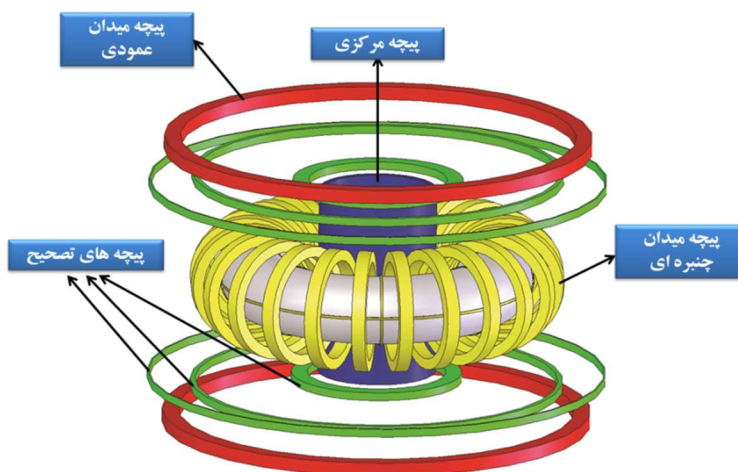
<sup>3</sup> Ramirez

<sup>4</sup> Nonhomogeneous meshgrid finite difference method

<sup>5</sup> Limiter



۱ نمایشی از پیچه‌های مولد میدان‌های مغناطیسی چنبره‌ای، اهمی و عمودی توکامک الوند را نشان می‌دهد.



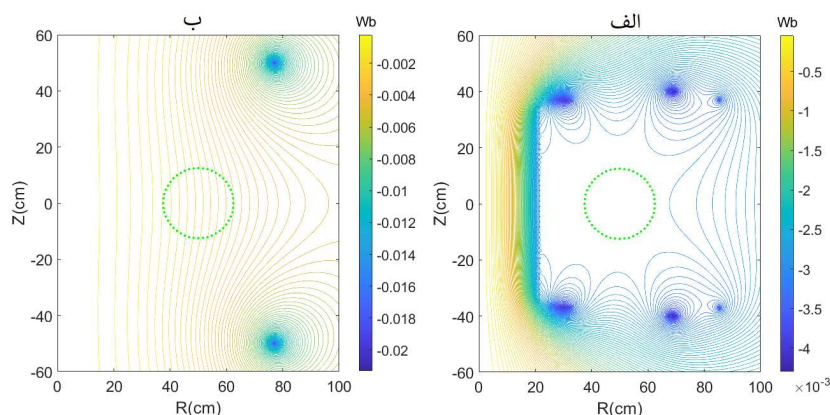
شکل ۱ پیچه‌های میدان‌های مغناطیسی توکامک الوند.

وظیفه پیچه مرکزی گرمایش اهمی پلازما به کمک القای جریان در پلازما بوده و به آن پیچه اهمی نیز گفته می‌شود. وظیفه پیچه‌های تصحیح<sup>۱</sup>، اصلاح شکل خطوط میدان مغناطیسی پیچه مرکزی می‌باشد به صورتی که میدان بدست آمده از پیچه مرکزی در محدوده حضور پلازما به کمترین مقدار خود برسد. در شکل ۲-الف نمایشی از شار مغناطیسی ایجاد شده به کمک پیچه مرکزی که توسط پیچه‌های تصحیح اصلاح گردیده، نشان داده شده است. سطح مقطع محفظه خلاء در این شکل به صورت دایره نقطه‌چین سبز رنگ مشاهده می‌شود. همانطور که در شکل نیز (۲-الف) مشخص است، خطوط میدان مغناطیسی تولید شده توسط پیچه مرکزی، به وسیله پیچه‌های تصحیح به سمت خارج هدایت شده و از ناحیه بیرونی و شعاع‌های بزرگ می‌گذرند به گونه‌ای که در داخل محفظه خلاء هیچ خط میدانی از پیچه اهمی وجود ندارد. به دلیل حضور پیچه‌های تصحیح، تغییر شار مغناطیسی بزرگی توسط پلازما احساس شده و بیشترین جریان در پلازما القا می‌شود. در توکامک‌ها شامل سطح مقطع دایروی یا کشیده، برای حفظ موقعیت افقی پلازما از یک میدان مغناطیسی با جهت عمودی به نام میدان تعادلی یا میدان عمودی استفاده می‌شود. این میدان در اندرکنش با جریان پلازما، یک نیروی شعاعی به سمت دیواره داخلی محفظه خلاء وارد می‌کند که

<sup>۱</sup> Compensation Coils

ستون پلاسما را در راستای افقی متعادل نگه می‌دارد. در شکل ۲-ب، سطوح شار مغناطیسی بدست آمده از پیچه‌های میدان مغناطیسی عمودی نشان داده شده است. با توجه به اینکه توکامک الوند برای تولید پلاسما با سطح مقطع دایروی طراحی و ساخته شده است، لذا در این توکامک پیچه مولد میدان کشیدگی وجود ندارد.

در این مقاله معادله گراد شافرانیف برای هندسه توکامک الوند حل شده و نتایج مورد بحث و بررسی قرار خواهند گرفت. در بخش دوم به نحوه حل معادله گراد-شافرانیف با هندسه توکامک الوند برای تعیین شرایط تعادل پلاسما پرداخته خواهد شد. در بخش سوم، داده‌های بدست آمده از محاسبات عددی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند و در بخش آخر، به خلاصه نتایج مهم پژوهش جاری اشاره می‌گردد.



شکل ۲ الف) شار مغناطیسی ایجاد شده به کمک پیچه مرکزی و پیچه‌های تصحیح میدان اهمی (جریان پیچه اهمی ۱۵۰۰ آمپر)، ب) شار مغناطیسی ایجاد شده به کمک پیچه میدان عمودی (جریان پیچه اهمی ۱۰۰۰ آمپر).

## ۲. توصیف و حل معادله گراد-شافرانیف

### ۲-۱ گسسته‌سازی معادله گراد-شافرانیف در نوشتار اختلاف محدود

در این پژوهش برای حل معادله گراد-شافرانیف از نوشتار اختلاف محدود<sup>۱</sup> و فرآیند حل سناکی<sup>۲</sup> محدود استفاده شده است. شکل کلی معادله گراد-شافرانیف به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 R J_\phi = -\mu_0 R \alpha f_\phi(\psi) \quad (3)$$

<sup>1</sup> Finite Difference

<sup>2</sup> Cenacchi Procedure



که در آن،  $\Psi$  تابع شار و  $J_\varphi$  چگالی جریان چنبره‌ای است که می‌توان آن را به شکل  $\alpha \hat{J}_\varphi(\psi)$  نیز نوشت.  $\alpha$  پارامتری است که به چگالی جریان چنبره‌ای مربوط می‌شود. در نوشتار اختلاف محدود طرف اول معادله (۳) به رابطه زیر تبدیل می‌گردد [۱۳]:

$$\frac{\psi_{i+1,j}-2\psi_{i,j}+\psi_{i-1,j}}{\Delta R^2} - \frac{1}{R_i} \frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2\Delta} + \frac{\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}}{\Delta Z^2} = -\mu_0 R \alpha \hat{J}_\varphi(\psi_{i,j}) \quad (4)$$

که در آن، گسسته‌سازی  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  به روش مرکزی<sup>۱</sup> صورت گرفته است [۱۴]. اگر  $\Delta R = \Delta Z$  را اعمال کنیم و آن را برابر  $h$  در نظر بگیریم، می‌توان عبارت (۴) را به صورت رابطه زیر بازنویسی کرد:

$$\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j} - \frac{1}{2i}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) + \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1} = -\mu_0 R j_\varphi(\psi_{i,j}) h^2 = -\mu_0 R \alpha \hat{J}_\varphi(\psi_{i,j}) h^2 \quad (5)$$

در رابطه بالا، مقدار  $\hat{J}_\varphi(\psi_{i,j})$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{J}_\varphi(\psi_{i,j}) = \frac{1}{\mu_0} \left( r + \frac{c}{r} \right) \psi \quad (6)$$

اگر رابطه (۶) را به صورت گسسته بازنویسی کنیم خواهیم داشت:

$$\psi_{i+1,j} - 4\psi_{i,j} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} = K_{i,j} \quad (7)$$

و اگر رابطه (۷) را در طرف دوم رابطه (۵) جایگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{4} \left( \left(1 - \frac{1}{2i}\right) \psi_{i+1,j} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - K_{i,j} \right) \quad (8)$$

که در این عبارت،  $K_{i,j}$  به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$-\alpha (\Delta r^2) (i^2 \Delta r^2 + C) \psi_{i,j} = K_{i,j} \quad (9)$$

در شرایطی که در عبارت (۹)،  $C=0$  یعنی معادل  $\beta_p=1$  باشد، در این صورت  $K_{i,j}$  به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$-\alpha (\Delta r^4) i^2 \psi_{i,j} = K_{i,j} \quad (10)$$

رابطه (۸) صورت کلی رابطه بازگشتی برای تابع  $\psi$  بوده و در فرآیند حل مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

در این پژوهش، دامنه‌ای که برای حل مسئله در نظر گرفته شده است، محدود به فضای داخل محفظه خلاء توکامک الوند می‌باشد، یعنی مرز مسئله و شرایط مرزی بر روی دیواره محفظه خلاء تعریف می‌شوند. البته می‌توان این مرز را محدود به خود پلاسمای نموده و یا مرز را آنقدر گسترش داد که

<sup>۱</sup> Center



شامل کلیه پیچ‌های میدان مغناطیسی خارجی نیز باشد، ولی با توجه به مقایسه با کارهای مشابه و همچنین اهمیت بالای فضای داخل محفظه خلاء از نظر مطالعات پلاسما، انتخاب دیواره محفظه خلاء به عنوان مرز در این پژوهش مناسب به نظر می‌رسد. ابعاد مش انتخاب شده می‌تواند ۱، ۲، ۵ و ۱۰ میلی متر بسته به دقت مورد نیاز باشد. عموماً انتخاب مش‌های کوچک‌تر زمان محاسباتی بالاتری را نیاز دارد.

## ۲-۲ فرض‌های اولیه و محاسبه شرایط مرزی

در این پژوهش، دو نوع چگالی جریان اولیه برای پلاسما فرض شده است. ابتدا فرض شد که کل فضای داخل محفظه خلاء دارای چگالی جریان پلاسما یکنواخت است و به مرور در روند تکرار این چگالی جریان موضعی‌تر انتخاب می‌شود. در فرض دوم برای چگالی جریان پلاسما یک تک رشته<sup>۱</sup> در وسط محفظه خلاء در نظر گرفته می‌شود که جریانی برابر با جریان کل پلاسما را دارد. این جریان به مرور و در روند حل مسئله بازتر و پهن‌تر می‌گردد. انتخاب فرض اول برای چگالی جریان در مواقعی که معادله برای پلاسماهای کشیده حل می‌شود روند حل را دچار ناپایداری‌های عددی می‌کند. همچنین، زمان محاسبه با فرض اول طولانی‌تر می‌گردد.

وقتی یک توزیع اولیه برای چگالی جریان پلاسما انتخاب شود و مقدار جریانی که در سطح هر مش جاری است بدست آید، نوبت به محاسبه شرایط مرزی می‌رسد. تابع شار بر روی مرز یا همان دیواره محفظه خلاء حاصل جمع دو جمله زیر است: جمله اول شار بدست آمده از پیچ‌های میدان مغناطیسی خارجی بوده و جمله دوم شار بدست آمده از توزیع چگالی جریان پلاسما است. هر یک از این جملات باید بر روی هر نقطه از مرز به صورت منفرد حساب شده و حاصل آن‌ها با هم جمع شوند. پس از انجام محاسبات بالا برای تمام نقاط واقع بر روی مرز، مرحله محاسبه شرایط مرزی به پایان می‌رسد. برای محاسبه توابع شار از رابطه (۱۱) استفاده می‌شود که در آن  $R$  و  $Z$  مختصات نقطه مورد نظر بر روی مرز و  $R'$  و  $Z'$  مختصات پیچ‌های خارجی یا مختصات حلقه‌های جریان مربوط به توزیع جریان پلاسما و یا مختصات مربوط به پیچ‌های غیرفعال می‌باشند.

$$\Psi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \sqrt{(R + R')^2 + (Z - Z')^2} \right) [(2 - k^2)K(k) - 2E(k)] \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)،  $K(k)$  و  $E(k)$  توابع انتگرال بیضوی کامل هستند. همچنین  $k^2$  از عبارت زیر محاسبه می‌شود:

<sup>1</sup> Current Filament



$$k^2 = \frac{4RR'}{(R+R')^2 + (Z-Z')^2} \quad (12)$$

بر اساس رابطه (۱۱)، می‌توان  $\Psi$  را به صورت  $\Psi = \text{ING}$  نیز بازنویسی کرد. که در آن،  $I$  جریان پیچ،  $N$  تعداد دور پیچ و  $G$  تابع گرین به ازای جریان واحد و دور واحد می‌باشد. برتری این کار این است که می‌توان  $G$  را قبل از شروع فرآیند حل به صورت جداگانه محاسبه و ذخیره کرد و در فرآیند حل تنها آن را بازخوانی نمود. مسئله‌ای که محاسبه تابع شار را با مشکل مواجه می‌سازد، وجود توابع نوع اول و دوم انتگرال بیضوی است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{1-k^2 t^2}} \quad (13)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (14)$$

این توابع جواب تحلیلی ندارند و باید به صورت عددی آن‌ها را محاسبه کرد. البته برای این توابع بسط‌هایی نیز وجود دارند که به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \right]^2 k^{2n} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(0)^2 k^{2n} \quad (15)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \right] \frac{k^{2n}}{1-2n} \quad (16)$$

این بسط‌ها برای مقادیر  $k$  نزدیک به ۱، دارای خطای نسبتاً بزرگی بوده (تا ۰/۳۰٪) و برای استفاده در محاسبات مناسب نیستند. به جای آن‌ها می‌توان از شکل‌های انتگرالی بیان شده استفاده کرد و از آن‌ها به روش‌های مختلفی چون انتگرال‌گیری عددی با بازه‌های برابر یا بازه‌های نابرابر، انتگرال گرفت. به عنوان مثال، با استفاده از روش سیمپسون، که به شکل زیر نوشته می‌شود، می‌توان توابع انتگرال بیضوی را محاسبه نمود:

$$\int_{x_0=a}^{x_2=b} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \Delta \varepsilon^4 \quad (17)$$

که در آن،  $h = \frac{b-a}{2}$  می‌باشد. همچنین می‌توان از روش انتگرال‌گیری با بازه‌های نابرابر استفاده نمود که به یک جواب عددی با دقت بسیار بالا برای انتگرال‌های بیضوی خواهد رسید. البته در صورتی که محاسبات با استفاده از نرم‌افزارهای MATLAB، MAPLE و غیره انجام شود، انتگرال‌های بالا به کمک خود نرم‌افزار محاسبه خواهند شد، ولی در محاسبات با زبان‌های برنامه‌نویسی دیگر چون FORTRAN باید کلیه مراحل به کمک نویسنده انجام پذیرد.

## ۳-۲ فرآیند حل

بعد از محاسبه شرایط مرزی بر روی هر یک از نقاط روی مرز، روند حل با استفاده از رابطه بازگشتی (۷) آغاز می‌شود. در این حالت معادله، یک معادله غیرهمگن و خطی بوده که باید بعد از اعمال شرایط مرزی و تشکیل دستگاه معادلات مورد محاسبه قرار گیرد. روندی که برای حل دستگاه معادلات انتخاب شد روش گوس-سایدل<sup>۱</sup> بوده و مراحل تکرار تا جایی ادامه پیدا می‌کند که اختلاف دو جواب در دو تکرار متوالی، در هر نقطه روی بازه مسئله، از خطایی که توسط نویسنده برنامه (در این محاسبات  $Error = 1 \times 10^{-5}$ ) اعلام می‌گردد کوچک‌تر شود. زمانی که فرآیند حل کامل شد، خروجی مسئله  $\psi(i,j)$  هایی خواهد بود که به هر نقطه اختصاص دارد. پس از حل برای تعیین مرز پلاسما، نقطه تماس ستون پلاسما با محدود کننده به عنوان مرز پلاسما در نظر گرفته شده و چگالی جریان نقاطی که دارای شار کوچک‌تر از شار مرز پلاسما هستند، صفر منظور می‌شود. این مسئله به این دلیل است که در عمل نیز جریان پلاسما توسط محدود کننده یا منحرف کننده برش داده شده و بعد از مرز پلاسما جریان ستون به صفر کاهش می‌یابد. پس از آن نقاطی که چگالی جریان آن‌ها صفر نیست با هم جمع شده و ضریب  $\alpha$  طوری محاسبه می‌شود که جریان کل پلاسما ثابت بماند. برای همگرایی محاسبات، اگر اختلاف چگالی جریان محاسبه شده در هر یک از نقاط با چگالی جریان محاسبه شده از مرحله قبل، کوچک‌تر از یک حد معین باشد، در این صورت محاسبه عددی به جواب همگرا شده و دیگر نیاز به تکرار مجدد محاسبات نخواهد بود. در این حالت به راحتی می‌توان به مرحله بعدی محاسبه یعنی استخراج پارامترهای فیزیکی پرداخت. در غیر اینصورت دوباره به مرحله اول بازگشته و با توزیع جریان بدست آمده، بار دیگر شرایط مرزی محاسبه می‌شود و فرآیند حل تکرار می‌گردد.

## ۳. بررسی و تحلیل نتایج محاسبات

همانطور که گفته شد توکامک الوند یک توکامک با سطح مقطع دایروی است. این توکامک هیچ نوع میدان مغناطیسی برای کشیدگی پلاسما در راستای عمودی ندارد و بدین خاطر پلاسما تولید شده در آن دارای سطح مقطع دایروی می‌باشد. در این توکامک ستون پلاسما تنها با استفاده از میدان تعادلی یا مغناطیسی عمودی در راستای افق نگهداری می‌شود. در اثر میدان مغناطیسی تعادلی، شعاع اصلی و فرعی پلاسما تغییر می‌کند. وقتی جریان پلاسما در داخل توکامک تشکیل می‌شود، شعاع

<sup>1</sup> Gauss-Seidel Method

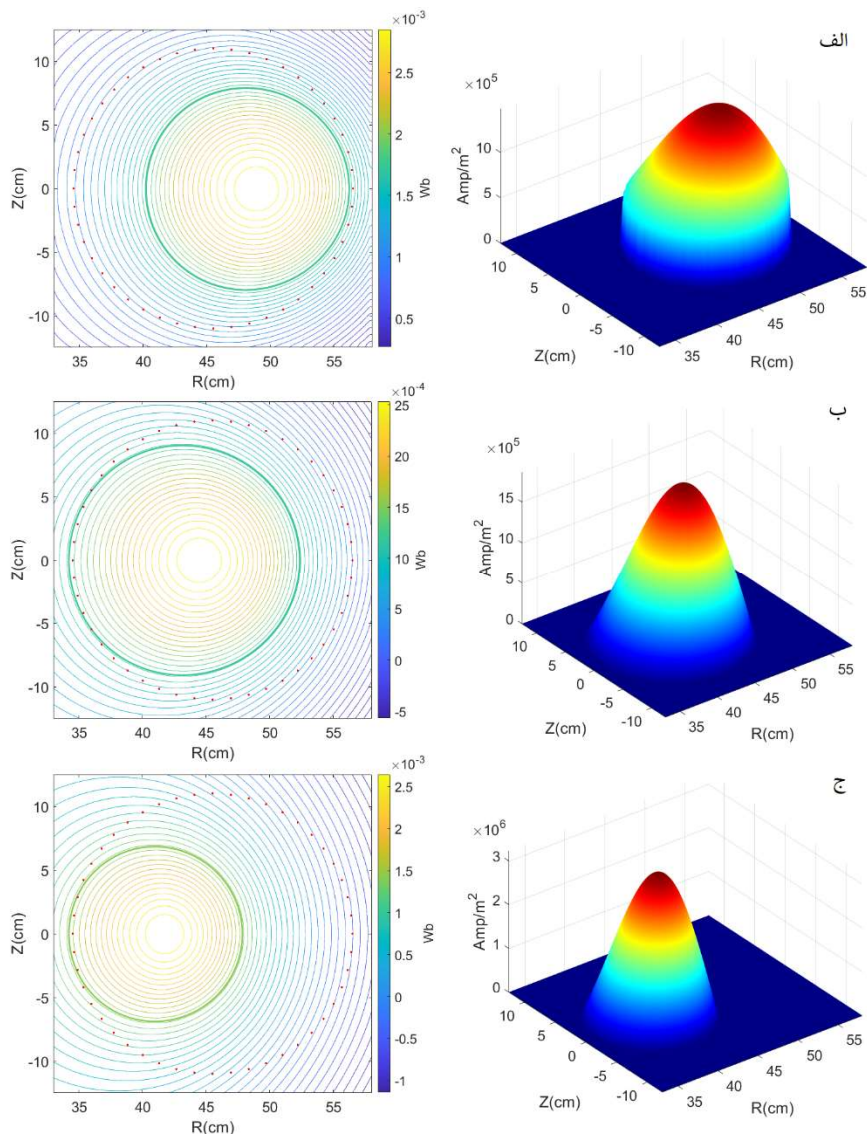


اصلی پلازما به دلیل هندسه چنبره‌ای دستگاه شروع به افزایش می‌کند، در نتیجه برای جلوگیری از رشد بیشتر شعاع اصلی و برخورد آن به دیواره محفظه خلاء از میدان مغناطیسی عمودی یا تعادلی استفاده می‌شود. در این حالت می‌توان گفت دو عامل مهم در شعاع اصلی و فرعی پلاسمای تولید شده تاثیرگذار است. اول جریان پلازما، که با افزایش آن شعاع اصلی پلازما افزایش می‌یابد و دوم شدت میدان مغناطیسی عمودی، که با افزایش جریان پیچه تعادلی، شدت میدان مغناطیسی عمودی افزایش یافته و در نتیجه ستون پلازما به سمت دیواره داخلی محفظه خلاء فشرده می‌شود. بدین ترتیب هم شعاع اصلی و هم شعاع فرعی پلازما کاهش می‌یابد. با کاهش شعاع اصلی و فرعی پلازما، نسبت منظر<sup>۱</sup> (نسبت شعاع اصلی به فرعی) پلاسمای تولید شده در توکامک تغییر می‌کند. شکل ۳، شار مغناطیسی و چگالی جریان محاسبه شده برای پلاسمایی با جریان ۲۰ کیلو آمپر و جریان‌های مختلف پیچه مولد میدان‌های عمودی را نشان می‌دهد. محدود کننده پلازما در این شکل‌ها با نقاط قرمز رنگ مشخص شده است.

همانطور که در شکل نیز مشخص است، ستون پلازما ابتدا (شکل ۳ الف) در شعاع حدود ۴۱/۱ سانتی‌متری محفظه قرار دارد، در حالی که شعاع فرعی پلازما در حدود ۸/۱ سانتی‌متر است. در این حالت نسبت منظر پلازما حدود ۵/۱ می‌باشد. با افزایش جریان در پیچه‌های مولد میدان مغناطیسی، نیروی رو به داخل آن افزایش یافته و پلازما به سمت شعاع کوچک‌تر فشرده می‌شود. در این وضعیت شعاع اصلی پلازما کاهش یافته ولی شعاع فرعی آن افزایش می‌یابد. شعاع اصلی و فرعی پلازما در این حالت به ترتیب به  $۴۳/۳$  و  $۹/۱$  سانتی‌متر می‌رسد. همچنین با افزایش میدان عمودی نسبت منظر به  $۴/۷$  کاهش پیدا می‌کند. لازم به توضیح است که پایداری و زمان محصورسازی پلازما با نسبت منظر نسبت عکس دارد، بدین معنی که با کاهش نسبت منظر پلاسمای تولید شده در توکامک، پایداری و زمان محصورسازی پلازما بهبود می‌یابد. با افزایش بیشتر جریان در پیچه مولد میدان عمودی به ۱۱۰۰ آمپر، کاهش شعاع اصلی پلازما بیشتر می‌شود، البته این بار کاهش شعاع به گونه‌ای است که با فشرده شدن بیشتر پلازما به لبه داخلی محدودکننده و برش بیشتر ستون پلازما شعاع فرعی آن نیز کاهش می‌یابد. در این حالت شعاع اصلی و فرعی پلازما به ترتیب  $۴۱/۱$  و  $۶/۸$  سانتی‌متر و نسبت منظر ۶ می‌باشد. همانطور که گفته شد افزایش نسبت منظر سبب کاهش کیفیت محصورسازی خواهد گردید. برای جبران این ضعف می‌توان جریان ستون پلازما را افزایش

<sup>۱</sup> Aspect Ratio

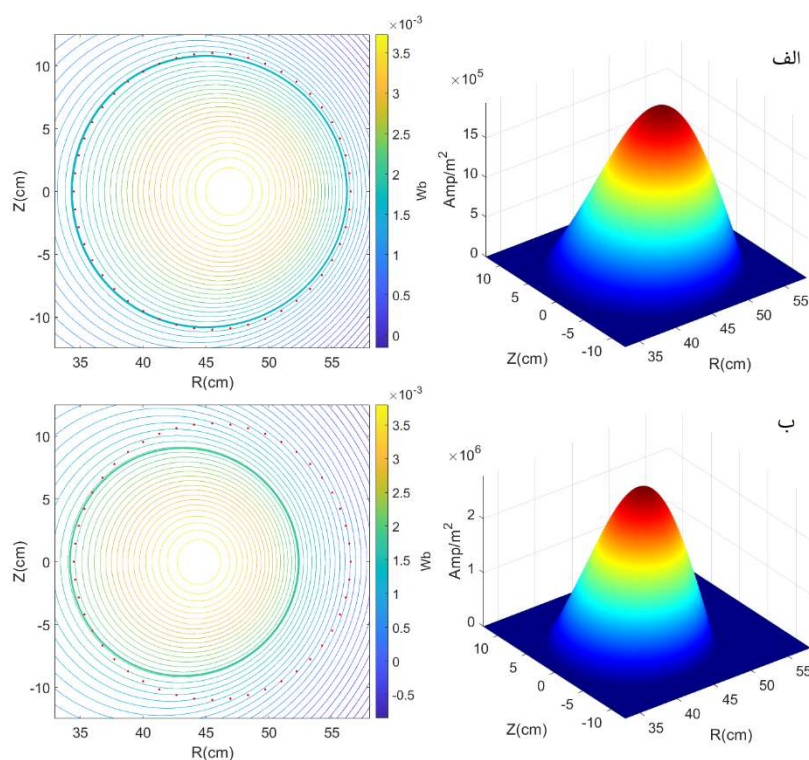
داد. این کار با افزایش انرژی پیچه مرکزی و در نتیجه القای بیشتر جریان در ستون پلاسما امکان پذیر خواهد بود. با افزایش جریان پلاسما، شعاع اصلی و فرعی آن دوباره افزایش پیدا می کنند.



شکل ۳ سطوح شار پلاسمای توکامک برای جریان پلاسمای ۲۰ کیلوآمپر و جریان های (الف) ۹۰۰، (ب) ۱۰۰۰ و (ج) ۱۱۰۰ آمپر پیچه مولد میدان مغناطیسی عمودی.



شکل ۴، وضعیت تعادل پلاسمای تولید شده را برای جریان پلاسمای ۳۰ کیلوآمپر و جریان‌های تعادلی ۱۴۰۰ و ۱۵۰۰ آمپر نشان می‌دهد. با جریان پلاسمای ۳۰ کیلوآمپر، ستون پلازما کمابیش تمامی منطقه مجاز توسط محدود کننده را پر کرده و حجم پلازما به بیشترین مقدار خود می‌رسد. در این حالت شعاع اصلی پلازما به ۴۵/۴ سانتی‌متر و شعاع فرعی به ۱۰/۸ سانتی‌متر می‌رسد. همچنین، نسبت منظر پلازما به کمترین مقدار خود یعنی ۴/۲ می‌رسد که با کیفیت‌ترین حالت پلازما برای توکامک الوند می‌باشد. این وضعیت نیز دوباره با افزایش میدان عمودی و فشرده شدن پلازما به سمت دیواره داخل خراب شده و به مقادیر ۴۳/۳ سانتی‌متر برای شعاع اصلی و ۹/۱ سانتی‌متر برای شعاع فرعی و در نتیجه ۴/۷ برای نسبت منظر خواهد رسید.



شکل ۴ سطوح شار پلاسمای توکامک برای جریان پلاسمای ۳۰ کیلوآمپر و جریان‌های (الف) ۱۴۰۰، (ب) ۱۵۰۰ آمپر پیچه مولد میدان مغناطیسی عمودی.

#### ۴. نتیجه گیری

ماشین‌هایی چون تتاپینچ و سایر ماشین‌های خطی تنها می‌توانند پلاسما را در راستای شعاعی محصور نمایند و هیچ عاملی نمی‌تواند مانع از جریان آزاد پلاسما در امتداد خطوط میدان شود. در تخلیه‌های استوانه‌ای، پلاسما از راه انتهای دستگاه از بین می‌رود، مگر اینکه تمهیدی برای جلوگیری از این امر انجام شود. پاسخ واضح این است که سیلندر را به شکل یک چنبره خم کنید تا پلاسما به جای خروج از انتهای آن، در مسیر بسته جریان پیدا کند. اگرچه این امر منجر به ناپایداری شعاعی ستون پلاسما خواهد شد، چرا که پلاسما می‌تواند خمیده استوانه‌ای یک نیروی خالص رو به بیرون را به دلیل باز توزیع پلاسما و فشار مغناطیسی تجربه می‌کند. چالش این کار این است که ترکیب بهینه‌ای از میدان‌های قطبی و چنبره‌ای به صورتی پیدا شود که بتواند تعادل چنبره‌ای ستون پلاسما را بدون به خطر انداختن پایداری شعاعی فراهم کند. ماشین توکامک یکی از هندسه‌های مورد توجه در پژوهش‌های همجوشی است که بر اساس آمار بهترین ترکیب پایداری چنبره‌ای و شعاعی را برقرار می‌کند. معادله‌ای که ترکیب مورد نیاز میدان‌های مغناطیسی را ارائه می‌دهد، یک معادله دو بعدی است که به معادله گراد-شافرانف مشهور است.

در این پژوهش حل معادله گراد-شافرانف برای هندسه و میدان‌های مغناطیسی توکامک الوند و همچنین با جریان‌های حقیقی پیچیده انجام شده است که عملاً نتایج آن در تنظیم میدان‌های مغناطیسی توکامک الوند و اطمینان از عملکرد صحیح دستگاه قبل از آزمایش حقیقی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای این منظور معادلات تعادل پلاسما، برای جریان‌های پلاسما ۲۰ و ۳۰ کیلوآمپر و جریان‌های تعادلی (میدان عمودی) ۹۰۰ تا ۱۵۰۰ آمپر با روش‌های عددی و بر اساس هندسه توکامک الوند حل شد. نتایج محاسبات نشان می‌دهد که کمترین نسبت منظر و در نتیجه بهترین شرایط برای محصورسازی پلاسما در این توکامک برای جریان پلاسما ۳۰ کیلوآمپر و میدان تعادلی ۱۴۰۰ آمپر قابل دسترس می‌باشد. همچنین در چنین شرایطی بیشترین حجم پلاسما تولیدی قابل دستیابی می‌باشد. نتیجه مهم دیگر این است که امکان ایجاد تغییرات وسیع در بازه جریان پلاسما و میدان‌های تعادلی، توکامک الوند را برای مطالعه ساختارهای مختلف پلاسما با شعاع اصلی، فرعی و نسبت منظرهای متفاوت مناسب می‌سازد. نکته بسیار مهم دیگر پیرامون کاربرد این پژوهش در آزمایشگاه این است که در حال حاضر فاصله زمانی بین دوشات متوالی در توکامک الوند در حدود ۱۰ دقیقه است و کد نوشته شده برای تحلیل تعادل پلاسما در این توکامک بسته به ابعاد مش انتخابی، از حدود ۱۰ ثانیه برای ابعاد مش ۱۰ میلی‌متر تا حدود ۵ دقیقه برای ابعاد مش ۲ میلی‌متر تغییر می‌کند.





این مدت زمان کاملاً مناسب برای استفاده در زمان بین دوشات، در آزمایشگاه توکامک الوند خواهد بود.

## منابع

- [1] Artsimovich L. A., "Tokamak Devices", Nucl. Fusion, 12, 215-252, 1972. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/12/2/012>
- [2] Kadomtsev B.B., Troyon F.S., Watkins M.L., "Tokamaks", Nucl. Fusion. 30, 1675-1694, 1990. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/30/9/003>
- [3] Khayrutdinov R.R., Lukash V.E., "Studies of Plasma Equilibrium and Transport in a Tokamak Fusion Device with the Inverse-variable Technique", Journal of Computational Physics, 109, 193-201, 1993. <https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1211>
- [4] Shafranov V. D., "On magnetohydrodynamical equilibrium configurations", Sov. Phys. JETP, 6, 545-554, 1958.
- [5] Cefron A. J., Freidberg J. P., "One size fits all analytic solutions to the grad-Shafranov equation", Physics of Plasmas, 17, 032502-1 - 032502-9, 2010. <https://doi.org/10.1063/1.3328818>
- [6] Maceda-Ramírez O., Carrera-Padilla C. R., Salguero-Martínez K., Segura-Ramírez M. A., and JHerrera-Velázquez J. E., "Exploring the limits of solov'ev profiles", Physics of Plasmas 28, 092509-1 - 092509-11, 2021. <https://doi.org/10.1063/5.0056125>.
- [7] Atanasiu C. V., Günter S., Lackner K. and Miron I. G., "Analytical solutions to the Grad-Shafranov equation", Physics of Plasmas 11, 3510-3518, 2004. <https://doi.org/10.1063/1.1756167>.
- [8] López J. E., Orozco E. A., Dougar-Zhabon V. D., "Fixed boundary Grad-Shafranov solver using finite difference method in nonhomogeneous meshgrid", Journal of Physics: Conference Series, Volume 1159, 1-6, 2019. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1159/1/012017>.
- [9] Rasouli C., Abbasi Davani F., Rokrok B., "Study of plasma equilibrium in toroidal fusion devices using mesh-free numerical calculation method", Physics of Plasmas 23, 082511-1 - 082511-7, 2016. <https://doi.org/10.1063/1.4960680>.
- [10] Feneberg W., "Tokamak with superposed multipole magnetic field", Physics Letter A, 36, 125-126, 1971. DOI 10.1016/0375-9601(71)90777-8.
- [11] Lackner K., "Computation of ideal MHD equilibria", Comp. Phys. Comm, 12, 33-44, 1976. [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(76\)90008-4](https://doi.org/10.1016/0010-4655(76)90008-4).
- [12] McNamara B., Computer Applications to Controlled Fusion Research (methods in computational physics)", Vol 16, Academic Press, New York, 211, 1976.
- [13] Carnahan Brice, Luther H. A., Wilkes James O, "Applied Numerical methods", John Wiley and Sons, 1969.
- [14] Landau Rubin H., José Páez Manuel, and Bordeianu Cristian C., "Computational Physics: Problem Solving with Computers", Second edition, Wiley-VCH Verlag GmbH, 2007.



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

