

Research Paper

Investigation of Frequency Spectrum and Poincaré Surfaces in Double Pendulum¹

AbdolJabbar Shokri², Behrooz Malek-Alkalmi³,
Hamed Heidari^{*4}, Mahyar Debiqian⁵ and Seyed Omid Sobhani⁶

Received: 2022.09.30

Revised: 2023.01.23

Accepted: 2023.02.18

Abstract

In this paper, the behavior of the double pendulums has been studied by considering the effect of initial conditions (angular displacement of the outer pendulum for four cases 12, 30, 90, and 150 degrees) and the influence of system geometry (increasing rod length and mass of the second pendulum), also. After extracting motion equations using the Lagrangian method, in order to deal with the frequency spectrum, traces of bobs, and understanding the system behavior for every case, the Fast Fourier Transform (FFT) technique and Poincare sections have been applied. The obtained results show that the consequence of the rising angular displacement the outer pendulum is to increase the energy level of the system and the change of its behavior from quasi-periodic for angular displacement is less than 90 degrees to chaotic when it is 150 degrees. Therefore, the energy level, in this case, has increased more than twice compared to the first. In addition, it seems a quasi-periodic behavior is forming at the heart of chaotic behavior. On the other hand, the results indicate a very significant effect of geometrics on a system's behavior. According to the calculations, the consequence of increasing the length of the rod of the second pendulum has only led to a different behavior from its similar case (case number 3) completely. however, their energy level is the same. Increasing the mass of the outer by twice not only to lead decrease energy level of the system by 330J but also has shown chaotic behavior (in comparison to the case3).

Keywords: *Computer Simulation, Fourier Transform, Double Pendulum, Poincaré Surfaces, Chaos.*

¹ DOI: 10.22051/ijap.2023.41916.1299

² Assistant Professor, Department of Science, University of Payamenoor, Tehran, Iran. Email: ajshokri1975@pnu.ac.ir

³ Associate Professor, Department of Physics, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran. Email: b.malakolkalami@uok.ac.ir

⁴ M. Sc. Graduated, Department of Physics, Varamin Region, Directorate of Education of Tehran Province, Iran. (Corresponding Author) Email: hamedheidari86@gmail.com

⁵ M. Sc. Student, Department of Physics, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran. Email: cchro1946@gmail.com

⁶ Instructor, Mathematics and Physics Department, Faculty of Shahid Yazdanpanah, Sanandaj Branch, Technical and Vocational University (TVU), Kurdistan, Iran. Email: sobhaniomid106@gmail.com



بررسی طیف بسامدی و سطوح پوانکاره در آونگ دوگانه^۱

عبدالجبار شکری^۲، بهروز ملک‌الکلامی^۳، حامد حیدری^{۴*}، مهیار دبیبیان^۵ و سیدامید سبحانی^۶

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۷/۰۸

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۱۱/۰۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۲۹

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران

دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا

سال سیزدهم، پیاپی ۳۴، پاییز ۱۴۰۲

صص ۷۵ - ۹۵

چکیده:

در این مقاله، رفتار آونگ‌های دوگانه با در نظر گرفتن تغییر در شرایط اولیه (یعنی افزایش زاویه انحراف آونگ بیرونی برای چهار حالت متفاوت ۱۲، ۳۰، ۹۰ و ۱۵۰ درجه) و همچنین بررسی اثر هندسه‌ی آونگ‌ها (افزایش طول بازو و جرم آونگ بیرونی) مطالعه شده است. بعد از استخراج معادلات حرکت آونگ‌ها، با استفاده از نگرش لاگرانژی، به منظور بررسی تعیین طیف بسامدی، مسیر حرکت آونگ‌ها و همچنین مشخص کردن رفتار آن‌ها در هر حالت، از روش‌های تبدیل سریع فوریه و سطوح پوانکاره استفاده شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که افزایش زاویه‌ی انحراف آونگ بیرونی منجر به افزایش سطح انرژی سامانه شده که پیامد آن، تغییر رفتار آونگ‌ها از حالت دوره‌ای و شبه‌دوره‌ای برای زاویه‌های کمتر از ۹۰ درجه به رفتار آشوبناک برای زاویه‌ی بیشتر از ۹۰ درجه است. به صورتی که در حالت آشوبناک مقدار سطح انرژی نسبت به حالت دوره‌ای بیشتر از دو برابر افزایش یافته است. افزون بر این، در درون رفتار آشوبناک، به نظر می‌رسد که یک رفتار شبه‌دوره‌ای با گذشت زمان در حال شکل‌گیری است. از طرف دیگر نتایج محاسبات از تأثیر بسیار چشمگیر ساختار هندسی سامانه بر رفتار آونگ‌ها حکایت دارد. بر اساس محاسبات انجام‌شده، پیامد افزایش طول بازوی آونگ دوم تنها منجر به ایجاد رفتاری کاملاً متفاوت با مورد مشابهش (حالت سوم) گردیده، اگرچه سطح انرژی آن‌ها باهم یکسان است. اما افزایش جرم آونگ دوم به دو برابر نه تنها سطح انرژی سیستم را به اندازه‌ی تقریبی ۳۳۰ ژول کاهش داده، بلکه رفتار آشوبناکی (نسبت به حالت سوم) نیز از خود نشان داده است.

واژگان کلیدی: شبیه‌سازی رایانه‌ای، تبدیل فوریه، آونگ دوگانه، سطوح پوانکاره، پدیده‌ی آشوب.

^۱ DOI: 10.22051/ijap.2023.41916.1299

^۲ استادیار، گروه علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. Email: ajshokri1975@pnu.ac.ir

^۳ دانشیار، گروه فیزیک، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران. Email: b.malakolkalami@uok.ac.ir

^۴ دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، منطقه ورامین، اداره آموزش و پرورش شهرستان‌های استان تهران، ایران. (نویسنده مسئول). Email: hamedheidari86@gmail.com

^۵ دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران. Email: cchro1946@gmail.com

^۶ مربی، گروه ریاضی و فیزیک، دانشکده فنی شهید یزدان‌پناه، شاخه‌ی سنندج، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، کردستان، ایران. Email: sobhaniomid106@gmail.com



۱. مقدمه

یکی از موضوعات مهم که همواره در کتاب‌های مکانیک کلاسیک و مهندسی ارتعاشات در کانون توجهات قرار داشته، آونگ است [۵-۱]. دلیل این امر را افزودن بر جنبه آموزشی، می‌توان به کاربرد گسترده آن در حوزه‌های مهندسی عنوان کرد. به‌عنوان نمونه، برای بررسی میزان مقاومت فلزات می‌توان از آزمون ضربه شاریپی اسم برد. یا در یک نمونه‌ی دیگر، جیمزوات برای تنظیم سرعت ماشین بخار خودش از آونگ‌هایی موسوم به آونگ‌های معلق استفاده کرده است [۶]. از میان انواع مختلف آونگ، آونگ‌های دوگانه جایگاه ویژه‌ای دارند. این نوع آونگ متشکل از دو جرم (بیشتر هم‌اندازه) بوده و دارای دو بازو می‌باشد. بازوی اول که یکسر آن به یک نقطه ثابت شده و سر دیگر آن به جرم اول که به آن آونگ درونی گفته می‌شود متصل است. جرم دوم که از راه بازوی دوم به آونگ درونی متصل شده است، آونگ بیرونی نام دارد، شکل ۱.

آونگ دوگانه مثالی از یک سامانه دینامیکی است که به‌صورت کلی رفتار پیچیده‌ای دارد از این رو توسط تعدادی قابل توجهی از پژوهشگران مورد مطالعه قرار گرفته است. به‌عنوان نمونه، به دلیل وابستگی زیاد رفتار آونگ دوگانه به شرایط اولیه، مایتای و همکاران [۷] متوجه شدند که اگر سرعت چرخش آونگ افزایش یابد، گذار از رفتار شبه‌دوره‌ای به آشوبناک اتفاق افتاده و دوباره این روند برعکس می‌شود. افزون بر این، آن‌ها دریافتند که افزایش سرعت چرخش سبب به وجود آمدن حالت‌های جدید تعادل می‌شود که متفاوت از مواردی است که در نوسانات شبه‌دوره‌ایی وجود داشته است. روی و همکاران [۸]، به بررسی رفتار آونگ دوگانه در انرژی‌هایی پایین با در نظر گرفتن شرایط اولیه، پرداختند. آن‌ها با استفاده از روش‌های تحلیلی توازن هماهنگ و لیندشدت-پوانکاره^۱ اهمیت شرایط اولیه در دینامیک آونگ دوگانه را آشکار کردند. آن‌ها نشان دادند که افزایش دامنه منجر به وابستگی بسامد به دامنه خواهد شد که برای دو مُد متفاوت است. نکته‌ای که در اینجا باید به آن اشاره شود استفاده از دو پیکربندی همفاز و ناهمفاز است که در پیکربندی ناهمفاز میزان وابستگی بسامد مُد به شرایط اولیه نسبت به همفاز بیشتر است، به‌صورتی که با افزایش دامنه در حالت ناهمفاز شاهد بسامدهای کوچک هستیم. این بسامدهای کوچک نشان از رفتار آشوبناک دارد. استاچویاک و اُکادا [۹] به تحلیل عددی آشوب در یک آونگ دوگانه پرداختند. آن‌ها با استفاده از سه ابزار از جمله؛ سطوح پوانکاره، نمودار چند شاخه و نمایانگرهای مشخصه‌ی لیاپونوف^۲ در پی یافتن رفتار آشوبناک در آونگ دوگانه بوده‌اند. آن‌ها متوجه شدند در مقادیر انرژی پایین

¹ Lindstedt-Poincare

² Lyapunov characteristic exponents



یک رفتار منظم و دوره‌ای از آونگ وجود دارد که با افزایش سطح انرژی گذار از دوره‌ای به شبه‌دوره‌ای مشاهده شد و در نهایت افزایش بیشتر سطح انرژی رفتار آشوبناک آونگ را به دنبال داشته است. همچنین با استفاده از ابزار نمودار چند شاخه که در آن پنجره‌هایی وجود داشت، رفتار آشوبناک سامانه را به تصویر کشیدند. در یک پژوهش دیگر اسپیندولا و همکاران [۱۰] به بررسی آونگ دوگانه درحالی که هر یک از آونگ‌های درونی و بیرونی دارای جرم متغیر بودند، پرداختند. نتایج محاسبات آن‌ها نشان داد متغیر بودن جرم هر یک از آونگ‌های در حال نوسان، منجر به رفتار ویژه در سامانه می‌گردد. رضوی و قادری [۱۱] در یک طرح پژوهشی اثر لولای متحرک بر رفتار آونگ‌ها را مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند. حرکت این لولای متحرک تحت تابعی ویژه بوده و نتایج محاسبات آن‌ها حاکی از آن است که با افزایش بسامد حرکت لولا، آونگ‌ها رفتار آشوبناک از خود نشان دادند؛ اما بررسی آونگ‌های دوگانه تنها به مطالعه‌ی رفتار آن‌ها محدود نیست. کاربرد این نوع آونگ‌ها در ساختار روپات‌ها و جرثقیل‌ها، همواره توجه تعداد قابل ملاحظه‌ای از مهندسين را به خود جذب کرده است. برای مثال در جرثقیل‌های تحریک ناقص^۱ که رفتاری شبیه به آونگ دوگانه دارند، هدایت سامانه یک چالش جدی است. سان و همکاران [۱۲] با استفاده از شبیه‌سازی رایانه‌ای و آزمایشگاه و به کارگیری نگرش بهینه‌ی انرژی پی بردند که امکان حرکت سریع تر واگن، پیچ و تاب خوردن و کاهش مصرف انرژی وجود دارد. یا در یک نمونه‌ی دیگر، کیومرثی و همکاران [۱۳] با استفاده از مدل‌سازی ریاضی به بررسی یک بازوی منعطف رباتی در قالب یک سامانه‌ی دو جرمی پرداخته‌اند. آن‌ها دریافتند که در نبود اتلاف، رفتار سامانه نوسانی بوده درحالی که در حضور میراکننده‌های مکانیکی رفتار سیستم به سمت پایداری میل می‌کند.

در این مقاله، رفتار آونگ دوگانه با استفاده از شبیه‌سازی رایانه‌ای، در دو حالت مختلف مطالعه و بررسی شده است. در حالت اول تأثیر شرایط اولیه بر رفتار آونگ‌های دوگانه مورد مطالعه قرار گرفت که برای این کار؛ تبدیل فوریه سریع^۲، فضای فاز سه بعدی و سطوح پوانکاره برای چهار زاویه‌ی انحرافی مختلف نسبت به خط قائم بررسی شد. در حالت دوم تأثیر هندسه‌ی آونگ‌ها مطالعه شد، به صورتی که در یک مورد با ثابت نگه‌داشتن جرم‌ها، طول بازوی دوم را تا دو برابر افزایش داده و در مورد دیگر جرم آونگ بیرونی را دو برابر کرده درحالی که طول بازوهای اتصال‌دهنده یکسان

¹ Underactuated

² Fast Fourier Transform

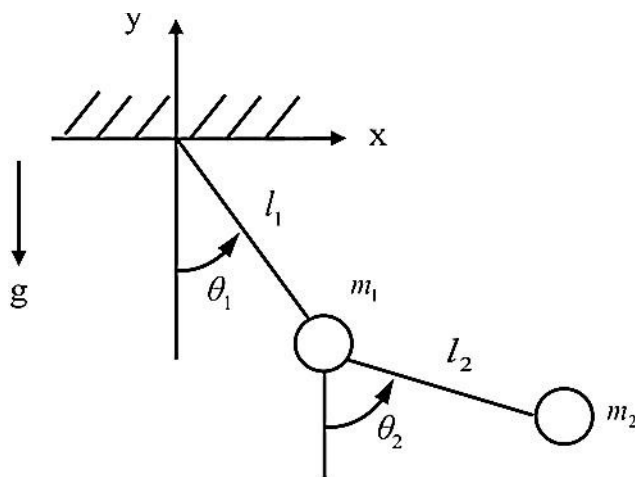


فرض شده‌اند. برای انجام محاسبات و استخراج نتایج از نرم‌افزارهای کامسول مولتی فیزیک^۱ و میپل^۲ استفاده شده است.

۲. فرمول‌بندی ریاضی

۱.۲ معادلات حاکم بر سامانه

برای شبیه‌سازی رفتار آونگ دوگانه، لازم است معادلات حاکم بر آن استخراج شود. این معادلات به صورت گسترده در بسیاری از متون دانشگاهی و مقالات مورد بررسی قرار گرفته است. اگرچه می‌توان از رهیافت مکانیک نیوتونی به این معادلات رسید، اما در اینجا از دینامیک لاگرانژی، برای معادلات حرکت یک سامانه آونگ دوگانه استفاده شده است. آونگ دوگانه، شکل ۱، شامل یک آونگ به جرم m_1 (آونگ درونی) که توسط بازویی به طول l_1 به یک نقطه ثابت شده و در انتهای دیگر آن آونگ دیگری به جرم m_2 (آونگ بیرونی) و به بازوی به طول l_2 متصل شده است.



شکل ۱ نمایشی هندسی از یک آونگ دوگانه.

برای شرح حرکت یک‌ذره می‌توان از دینامیک لاگرانژی که به صورت زیر بیان می‌شود استفاده کرد [۱۴ و ۱۵]:

$$L = T - V = T(\dot{q}, q) - V(q) \quad (1)$$

¹ Comsol Multiphysics

² Maple



که در آن $T(q, \dot{q})$ انرژی جنبشی و $V(q)$ انرژی پتانسیل کل سامانه است. لازم به یادآوری است که در اینجا $V(q)$ تنها تابعی از مختصات تعمیم یافته q است. برای استخراج معادلات حرکت از رابطه زیر استفاده شده است [۱، ۱۶]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_K} = 0 \quad (۲)$$

برای مورد آونگ دوگانه، همان‌طور که مشخص است تعداد مختصات تعمیم یافته چهار مورد (یعنی $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$) است. به صورتی که θ_1 و θ_2 به ترتیب میزان انحراف آونگ درونی و بیرونی از راستای قائم بر حسب rad و $\dot{\theta}_1$ و $\dot{\theta}_2$ سرعت زاویه‌ای (rad/s) می‌باشد. با محاسبه‌ی کمیت‌های انرژی جنبشی و پتانسیل و جاگذاری آن‌ها در معادله (۱) داریم:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + m_1 l_1 g \cos \theta_1 + m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (۳)$$

با استفاده از معادله (۲) می‌توان معادلات حرکت حاکم بر سامانه را به دست آورد:

برای m_1

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l_1} \sin \theta_1 = -\frac{l_2}{l_1} \frac{m_2}{m_1 + m_2} [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)] \quad (۴)$$

برای m_2

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l_2} \sin \theta_2 = \frac{l_1}{l_2} [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)] \quad (۵)$$

چون که معادلات بالا غیرخطی بوده بنابراین حل تحلیلی آن‌ها به استثنای موارد ساده، بسیار مشکل است در نتیجه برای حل چنین معادلاتی استفاده از روش‌های عددی مفید خواهد بود. برای حالت ویژه ($m_1 = m_2 = m$ و $l_1 = l_2 = l$) و جابجایی‌های بسیار کوچک ($\sin \theta_1 \cong \theta_1$ ، $\sin \theta_2 \cong \theta_2$ ، $\cos(\theta_2 - \theta_1) \cong 1$ و $\sin(\theta_2 - \theta_1) \cong (\theta_2 - \theta_1)$) معادلات بالا به صورت زیر

ساده خواهند شد:



$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\left(\frac{g}{l}\right)\theta_1 = 0 \quad (۶)$$

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{l}\right)\theta_2 = 0 \quad (۷)$$

با فرض این که جواب معادلات به صورت $\theta_1 = c_1 e^{i\omega t}$ و $\theta_2 = c_2 e^{i\omega t}$ (و ضرایب ثابت c_1 و c_2) تعریف شود و با جایگذاری این جواب‌ها در معادلات (۶) و (۷) و تشکیل دترمینان ضرایب c_1 و c_2 داریم:

$$\omega^4 - 4\omega^2 \left(\frac{g}{l}\right) + 2\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0 \quad (۸)$$

با حل این معادله بسامدهای بهنجار شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\omega_1 = \left(\frac{g}{l}(2 - \sqrt{2})\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(\frac{g}{l}(2 + \sqrt{2})\right)^{1/2} \quad (۹)$$

که در آن، ω_1 بسامد زاویه‌ای مُد متقارن و ω_2 مد نامتقارن نامیده می‌شود [۱۸-۱۶].

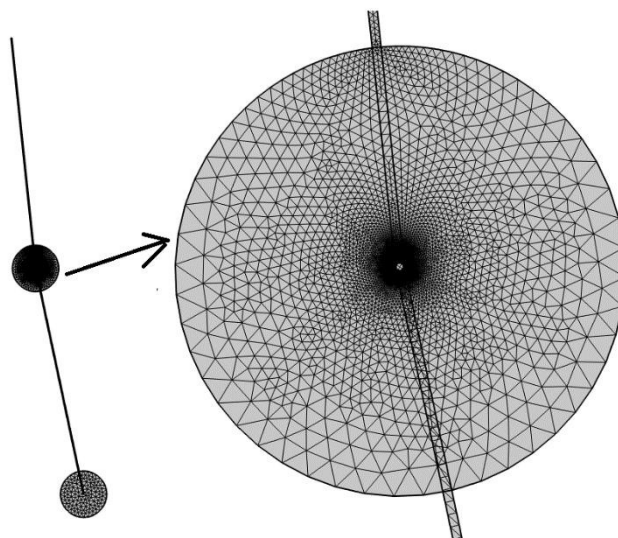
۲.۲ شرایط محاسبه

برای حل معادلات حرکت (۴) و (۵)، در مرحله‌ی اول از روش عناصر متناهی (FEM) و بسته‌ی نرم‌افزاری کامسول مولتی فیزیک برای ترسیم مسیر حرکت آونگ‌ها و همچنین بدست‌آمده آوردن بسامدهای آن‌ها (طیف بسامدی) استفاده شده است [۱۹]. روش کار نرم‌افزار کامسول به این صورت است که بعد از تعریف هندسه و پارامترهای موردنظر، شرایط مرزی اولیه توسط کاربر تعریف می‌گردد. در مرحله‌ی بعد نرم‌افزار هندسه موردنظر را به ناحیه‌های کوچکی به نام عنصر تقسیم می‌کند، شکل ۲. در ادامه با تعداد بسیار زیادی معادله سروکار داریم که هر کدام یکی از این عناصر را مدل‌سازی می‌کند، مجموعه‌ای بسیار بزرگ که کل هندسه‌ی موردنظر را در برمی‌گیرد، تشکیل می‌گردد. حل چنین معادله‌ای با کمک ماتریس امکان‌پذیر است [۲۰، ۲۱]. کامسول مولتی فیزیک از حل گره‌های مختلفی، بسته به نوع مسئله و انتخاب کاربر استفاده می‌کند. در این مقاله، از حل گر^۱ MUMPS برای حل معادلات موردنظر استفاده شده است. لازم به یادآوری است که این حل گر

^۱ Multi-frontal Massively Parallel Sparse direct Solver



از روش نیوتون برای حل هریک از معادلات استفاده می‌کند [۲۲]. هر یک از حالت‌های یک سامانه‌ی دینامیکی در قالب یک نقطه‌ی یکتا در فضا نشان داده می‌شود که به آن فضای فاز می‌گویند. با حرکت از یک نقطه به یک نقطه دیگر در طول زمان یک مسیر ایجاد می‌گردد، در نتیجه تعداد زیادی مسیر در این فضا ایجاد می‌گردد که تفسیر رفتار کلی سامانه را دشوار می‌کند. به منظور کاستن از این سختی، از روشی به نام سطح پوینکاره استفاده شده است. در این روش، یک صفحه به صورتی از فضای فاز عبور داده می‌شود که هریک در مسیر عبور کرده از صفحه، یک نقطه از خود به جا می‌گذارد (این صفحه یکتا نیست) [۲۳-۲۵]. در این مقاله برای رسم سطوح پوینکاره از نرم‌افزار میپل بهره برده‌ایم [۲۶]. یادآوری این نکته ضروری است که برای به‌دست آمده آوردن طیف بسامدی آونگ‌ها از روش تبدیل فوریه سریع (FFT) استفاده شده است [۲۷]. شرایط اولیه به این صورت است که سرعت اولیه برای تمام حالت‌ها صفر در نظر گرفته شده و مکان اولیه‌ی هریک از آونگ‌ها با توجه به حالت محاسبه شده متغیر هست. لازم به یادآوری است که از نیروهای اتلافی صرف نظر شده است.



شکل ۲ نمایی از هندسه‌ی شبکه‌بندی شده.

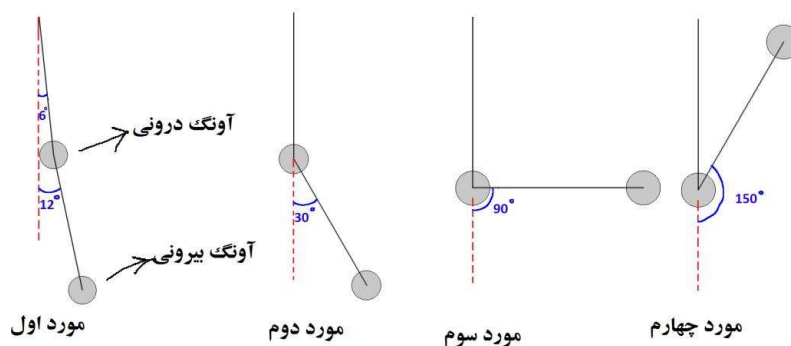
۳. نتایج و بحث

در این بخش نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی آونگ دوگانه در سه گام مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. در گام اول تأثیر تغییر شرایط اولیه بر رفتار آونگ دوگانه مطالعه شده، در گام دوم

اثر هندسه‌ی سامانه مورد بررسی قرار گرفته و در گام آخر با استفاده از سطوح پوانکاره، رفتار آونگ-ها در دو گام قبلی از زاویه دیگر تجزیه و تحلیل شده است.

۱.۳ تغییر زاویه‌ی انحراف از راستای قائم

یکی از کمیت‌های مهم که نقش کلیدی در رفتار آونگ در طول زمان دارد، میزان انحراف هر یک از آونگ‌ها از نقطه‌ی تعادل در زمان صفر ($t = 0$) است. برای این منظور چهار مورد را بررسی کرده که به جز مورد اول که میزان انحراف زاویه آونگ درونی ۶ درجه و آونگ بیرونی ۱۲ درجه هست، در سه مورد بعدی میزان انحراف آونگ داخلی را صفر درجه و میزان انحراف برای آونگ بیرونی برای موردهای دوم، سوم و چهارم به ترتیب برابر با ۳۰، ۹۰ و ۱۵۰ درجه فرض شده است. همچنین طول هر یک از میله‌های اتصال دهنده برابر با ۵۰۰ میلی‌متر است، شکل ۳.

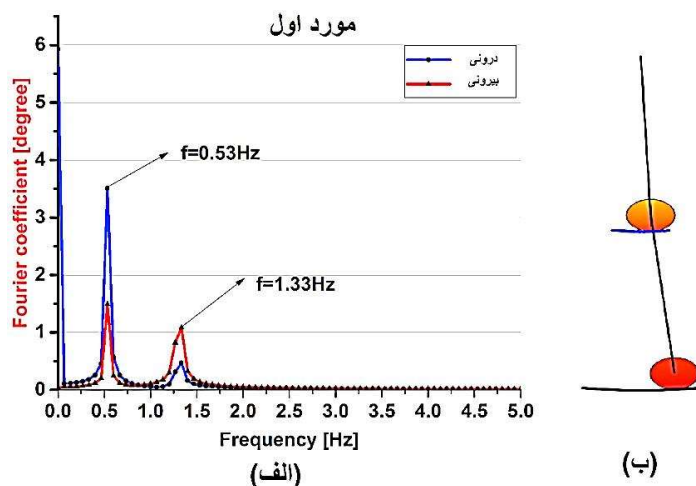


شکل ۳ نمایی از شرایط اولیه در حالت‌های مختلف در زمان $t = 0$.

مورد اول: یکی از کمیت‌های مهم در مطالعه‌ی آونگ محاسبه‌ی بسامد حرکت است. این مورد برای آونگ دو گانه اهمیت دوچندانی دارد. همان‌طور که در بخش ۱-۲ اشاره شد، آونگ‌های دو گانه دارای دو مد طبیعی موسوم به مدهای متقارن و نامتقارن هستند $(\omega_{\pm} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} (g/l)^{1/2})$. بر اساس این رابطه بسامد حالت متقارن برابر با $f = 0.54 Hz$ و برای مد نامتقارن $f = 1.31 Hz$ است. همان‌طور که در شکل ۴-الف ملاحظه می‌شود الگوریتم تبدیل فوریه سریع وجود این دو قله مربوط به مدهای متقارن و نامتقارن را به خوبی نشان می‌دهد. در بسامد متقارن، نسبت انحراف آونگ داخلی به آونگ بیرونی بیشتر از دو برابر بوده در حالی که این



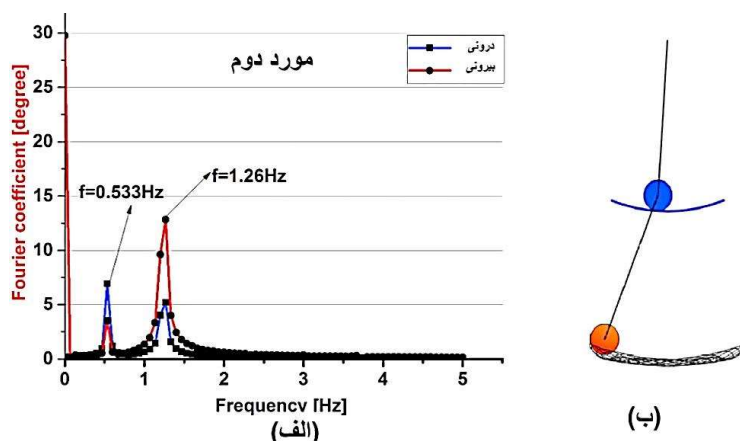
نسبت برای بسامد نامتقارن به کمتر از یک می‌رسد. به عبارت دیگر، در بسامد نامتقارن مشاهده می‌شود که میزان انحراف برای آونگ درونی بسیار کمتر شده و همچنین در مقایسه با آونگ بیرونی به نقطه‌ی تعادل نزدیک‌تر است. یکی از کمیت‌های جالب توجه در شبیه‌سازی حرکت آونگ‌های دوگانه بررسی مسیر حرکت آونگ در صفحه‌ی $x-l$ است، شکل ۴-ب. با توجه به شکل به درستی مشخص است که آونگ درونی به دلیل محدود بودن از یک طرف، تنها بر روی یک مسیر مقعر حرکت می‌کند. همچنین مسیر حرکت آونگ بیرونی مشابه با آونگ درونی بر روی یک مسیر کمائی شکل است.



شکل ۴ تبدیل فوریه سریع (الف) و مسیر حرکت (ب) برای آونگ دوگانه با زاویه‌های انحراف ۶ و ۱۲ درجه.

مورد دوم: در این قسمت، میزان انحراف برای آونگ درونی صفر بوده در حالی که آونگ بیرونی به اندازه‌ی ۳۰ درجه از محور قائم منحرف شده است. با توجه به وجود دو قلّه، ملاحظه می‌گردد که مقادیر بسامد متقارن با مقدار محاسبه‌شده از رابطه‌ی (۹) برابر بوده اما مقدار بسامد نامتقارن نسبت به مورد اول کاهش یافته است، شکل ۵-الف. با نگاهی به نمودار می‌توان پی برد که نسبت انحراف آونگ درونی به بیرونی در مد متقارن کمابیش دو برابر بوده، در حالی که این مقدار برای مد نامتقارن به بیشتر از دو برابر تغییر یافته است. در شکل ۵-ب مسیر حرکت هر دو آونگ بیرونی و درونی ترسیم شده است. با نگاهی دقیق به آن به درستی مشخص است که نوسانگر بیرونی در حال حرکت

بر روی یک مسیر کمابیش پیچیده می‌باشد. در حقیقت، آونگ بیرونی در حرکت رفت یا برگشت بر روی یک مسیر در همسایگی مسیر قبلی حرکت خواهد کرد؛ اما مسیر حرکت آونگ درونی (مشابه با مورد اول) محدود به یک کمان بوده ولی در مقایسه با مورد آونگ درونی با زاویه‌ی انحراف ۶ درجه طول بیشتری دارد.

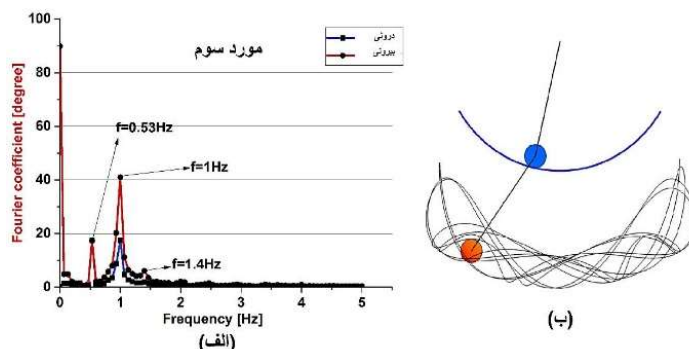


شکل ۵ تبدیل فوریه سریع (الف) و مسیر حرکت (ب) برای آونگ دوگانه با زاویه انحراف ۳۰ درجه.

مورد سوم: همانند مورد دوم در این قسمت از محاسبات، آونگ درونی بدون انحراف بوده درحالی که آونگ بیرونی زاویه‌ی ۹۰ درجه با محور عمود می‌سازد. همان‌طور که شکل ۶-الف نشان می‌دهد بسامدهای متقارن و نامتقارن با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع استخراج شده است. نمودار ترسیم شده به وضوح نشان می‌دهد که تفاوت فراوانی با موارد قبلی وجود دارد. درحالی که در مد متقارن انتظار انحراف بیشتر آونگ درونی نسبت به آونگ بیرونی را داریم، اما در این مد هر دو آونگ به یک اندازه جابجا شده‌اند. به بیانی دیگر، در اینجا نسبت انحراف آونگ درونی به بیرونی برابر با یک است. نکته‌ی بعدی به مقدار مد نامتقارن به دست آمده از راه شبیه‌سازی مربوط است. همان‌طور که مشخص است، اندازه‌ی بسامد در این مد به مقدار ۱ کاهش پیدا کرده است. افزون بر این، شاهد تعدادی قله‌های کوچک هستیم که نشان می‌دهد مدهای دیگر نیز وجود دارد. وجود چنین قله‌های ریزی نشانه‌هایی از گذار از حالت دوره‌ای یا شبه‌دوره‌ای به حالت آشوب است. بر اساس روال پیموده شده تا اینجا، در شکل ۶-ب مسیر حرکت آونگ‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که آونگ بیرونی مسیرهای طولانی‌تری را طی کرده است. همچنین

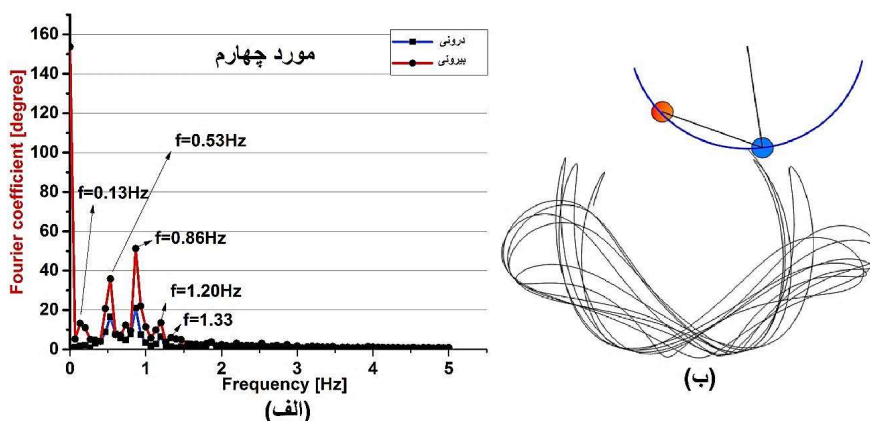


فاصله‌ی بین مسیرهای مجاور افزایش یافته است، اگرچه همچنان آونگ درونی محدود به حرکت بر روی یک مسیر کمانی شکل است.



شکل ۶ تبدیل فوریه سریع (الف) و مسیر حرکت (ب) برای آونگ دوگانه با زاویه انحراف 90° درجه.

مورد چهارم: همانند موارد دوم و سوم، در این مورد آونگ درونی بدون انحراف بوده و میزان انحراف برای آونگ بیرونی به 150° درجه افزایش یافته است. اولین نکته‌ای که باید به آن اشاره کرد این است که در محاسبه طیف بسامدی برای این مورد، در شکل ۷-الف، بسامد به دست آمده برای مد متقارن با مقدار تحلیلی کمابیش برابر است. همچنین با توجه به نتایج به دست آمده شاهد جابجایی بسامد نامتقارن به سمت چپ هستیم. در حقیقت، اینجا افزایش میزان انحراف آونگ بیرونی منجر به کاهش بسامد متقارن شده است. از طرف دیگر، برخلاف زاویه‌های انحرافی کمتر از 90° درجه که در آن نسبت انحراف آونگ درونی در مد متقارن بیشتر از انحراف آونگ بیرونی بود، اینجا در هر دو مد، میزان انحراف آونگ درونی از راستای قائم کمتر از آونگ بیرونی است. همچنین تعداد قلّه‌ها در آونگ بیرونی نسبت به موارد قبلی افزایش یافته است که نشانه‌ی رفتار آشوبناک سامانه است. با ترسیم مسیر حرکت آونگ‌ها، شکل ۷-ب، الگوی به دست آمده کاملاً متفاوت از موارد قبلی بوده، اگرچه آونگ درونی بر روی یک مسیر با تقعر بیشتر در حال حرکت است، خط تقارن این مسیر نسبت به موارد قبلی جابجا شده است. ضروری است که به این نکته اشاره شود در تمامی موارد بررسی شده، علیرغم نبود نیروهای اتلافی، میزان جابجایی آونگ بیرونی نسبت به زمان $t=0$ همواره کمتر بوده است. به عنوان نمونه، در آونگ با انحراف 150° درجه، بیشترین میزان انحراف آونگ بیرونی در زمان‌های $t>0$ ، در حدود 55° درجه است.



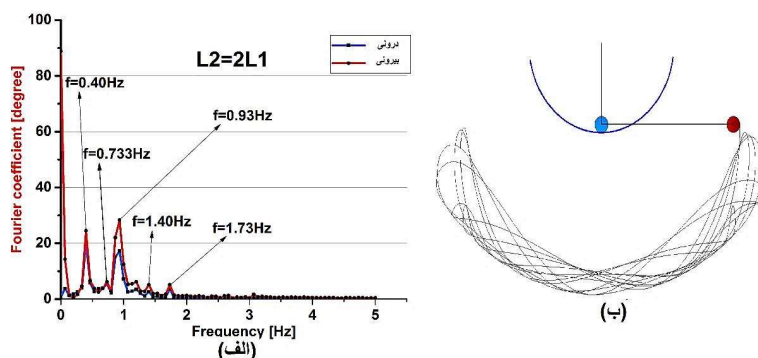
شکل ۷ تبدیل فوریه سریع (الف) و مسیر حرکت (ب) برای آونگ دوگانه با زاویه انحراف ۱۵۰ درجه.

۲.۳ بررسی تغییر طول و جرم

این بخش از مقاله تأثیر هندسه‌ی سامانه، یعنی تغییر طول بازوی دوم و جرم آونگ بیرونی، بررسی شده است. در حالت اول تنها طول بازوی آونگ بیرونی تا دو برابر آونگ درونی افزایش داده و در حالت دوم جرم آونگ بیرونی به دو برابر آونگ درونی (با فرض برابر بودن طول بازوها) افزایش داده شد. همچنین برای مقایسه‌ی بهتر با یکی از موارد قبلی (مورد سوم)، زاویه‌ی انحراف آونگ درونی صفر و برای آونگ بیرونی مقدار ۹۰ درجه در نظر گرفته شده است. در شکل ۸ (الف)، تبدیل فوریه سریع (FFT) و در شکل ۸ (ب)، مسیر حرکت برای طول افزایش یافته ترسیم شده است. با توجه به شکل ۸-الف، به درستی مشخص است که بیشتر از دو مد نوسانی وجود دارد. از روابط (۹) برای تشخیص مدهای متقارن از مدهای نامتقارن استفاده شده است. مقدار بسامد متقارن در این حالت برابر با $f = 0/43Hz$ بوده، درحالی که در مد نامتقارن این مقدار به $f = 1/14Hz$ می‌رسد. با توجه به نمودار نسبت انحراف آونگ بیرونی به درونی در مد متقارن در حدود یک است؛ یعنی در این حالت هر دو آونگ به یک میزان از محور قائم منحرف شده‌اند. اگرچه مقدار بسامد بدست آمده در حالت نامتقارن از رابطه‌ی (۹) با مقادیر روی نمودار اختلاف جزئی دارد، در حالت کلی در اینجا نسبت انحراف آونگ خارجی به داخلی بیشتر از واحد است. بیان این نکته ضروری به نظر می‌رسد که وجود تعداد مدها دیگر حکایت از تغییر رفتار سامانه از حالت شبه دوره‌ای به آشوبناک دارد. نکته مهمی که باید به آن اشاره کرد این است که در حالت افزایش طول آونگ بیرونی شباهت‌هایی با مورد چهارم (زاویه انحراف ۱۵۰ درجه) و تفاوت‌های با

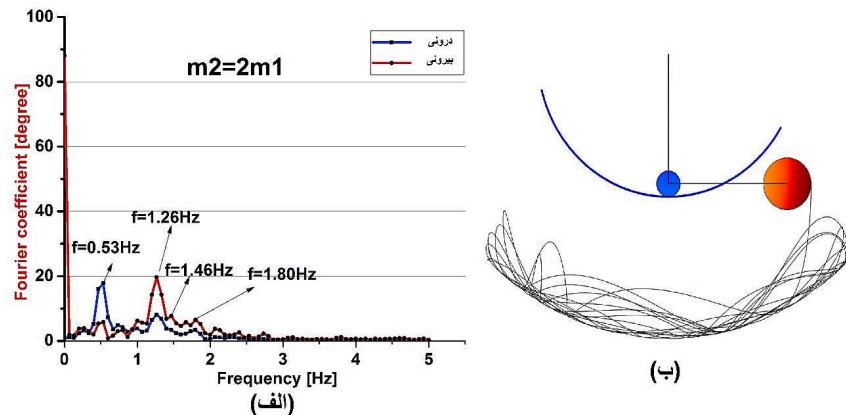


مورد سوم (زاویه انحراف ۹۰ درجه) وجود دارد. همان‌طور که مشخص است مقدار انحراف در مد متقارن برای آونگ درونی کمتر از بیرونی بوده که همین روند در انحراف ۱۵۰ درجه نیز مشاهده گردید، اما مقدار زاویه انحراف در مد متقارن برای مورد سوم در هر دو آونگ درونی و بیرونی به یک اندازه بود. اگرچه بیشتر روی مسیر حرکت آونگ بیرونی تأکید شد، درحقیقت برای مقایسه بیشتر، بررسی رفتار آونگ درونی هم ضروری است. همان‌طور که در شکل ۸-ب مشاهده می‌شود، میزان تقعر مسیر آونگ درونی در مقایسه با مورد سوم بیشتر اما میزان تقعر آن با مورد چهارم کمتر می‌باشد. به عبارتی دیگر می‌توان گفت در حالت افزایش طول بازوی دوم در زاویه انحراف ۹۰ درجه، شباهت آن با مورد چهارم بیشتر از مورد سوم است؛ که می‌توان نتیجه گرفت که تغییر هندسه پیکربندی می‌تواند شرایط نوسانی را تغییر دهد، یعنی سیستم را به حالت آشوبناک ببرد.



شکل ۸ مسیر حرکت آونگ‌های دوگانه- در حالت صفر و ۹۰ درجه و $L2=2L1$

در حالت دوم جرم آونگ بیرونی را با ثابت نگه‌داشتن جرم آونگ درونی تا دو برابر افزایش داده‌ایم، شکل ۹. طیف بسامدی برای این پیکربندی نشان می‌دهد که بسامدهای مد متقارن (سمت چپ) و مد نامتقارن (سمت راست) با توجه به شکل ۹-الف در میان قله‌های موردنظر مشهود است. برخلاف مدل مشابه (مورد سوم) با جرم‌های برابر، در مد متقارن انحراف آونگ درونی نسبت به آونگ بیرونی بسیار بیشتر بوده که این روند در مد نامتقارن تغییر می‌کند. همچنین در اینجا احتمال تغییر رفتار از حالت شبه دوره‌ای به آشوبناک به دلیل مشاهده‌ی قله‌های دیگر وجود دارد. در شکل ۹-ب مسیر حرکت آونگ‌ها ترسیم شده است. با توجه به شکل ۹، به جز افزایش طول مسیر آونگ درونی و جابجایی نسبی خط تقارن (برای آونگ درونی)، تفاوت قابل ملاحظه‌ی با مورد سوم مشاهده نمی‌شود.



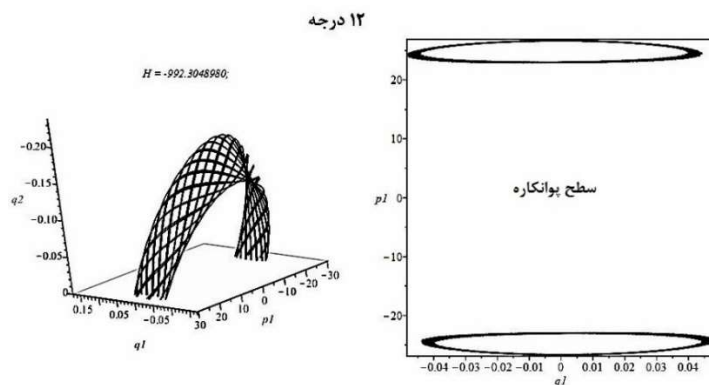
شکل ۹ مسیر حرکت آونگ‌های دوگانه- در حالت صفر و ۹۰ درجه و $m_2=2m_1$.

۳.۳ سطح پوانکاره برای زاویه‌های مختلف

در این قسمت برای بررسی بهتر رفتار سامانه، با توجه به شرایط اولیه‌ای که در بخش‌های قبل بررسی شد، از استفاده از سطح پوانکاره گزینه‌ای بسیار مناسبی است. دلیل استفاده از این روش به سادگی آن بر می‌گردد. سطح پوانکاره ابعاد مسئله این سامانه را به ابعاد کمتر کاهش می‌دهد. در حقیقت، هنگامی می‌خواهیم فضای فاز را بررسی کنیم، از بین چهار پارامتر مستقل $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ سه پارامتر را برای ترسیم فضای فاز انتخاب می‌کنیم که خود این بر پیچیدگی تفسیر رفتار سامانه اضافه می‌کند؛ بنابراین پوانکاره با کاهش فضای سه‌بعدی به دوبعدی می‌تواند گزینه‌ای مناسب باشد.

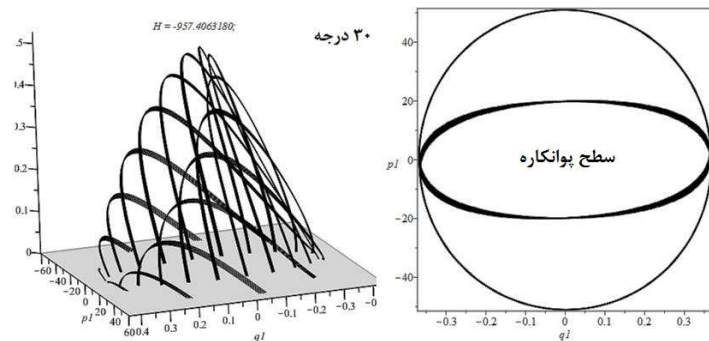
مورد اول: بررسی فضای فاز سه‌بعدی و سطح پوانکاره برای انحراف آونگ دوم به اندازه‌ی ۱۲ درجه است، شکل ۱۰. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، رفتار دوره‌ای همانند آنچه در نمودار مربوط به جابجایی ترسیم شد، مشخص است. با توجه به شکل ۱۰ (سمت راست) دو مسیر بسته مشاهده می‌شود که این دو مسیر بسته از برخورد نمودار فضای فاز با صفحه θ_2 (یعنی q_2) ایجاد می‌شود. وجود چنین مسیرهایی نشان از رفتار شبه دوره‌ای در طول زمان است. نقاطی که در مرکز هریک از این مسیرها قرار دارند، نقاط تعادل یا پایداری سامانه است که در اینجا این نقاط دارای یک جابجایی نسبی نسبت به همدیگر می‌باشند.





شکل ۱۰ فضای فاز سه‌بعدی (سمت چپ) و سطح پوانکاره برای آونگ دوگانه (مورد اول).

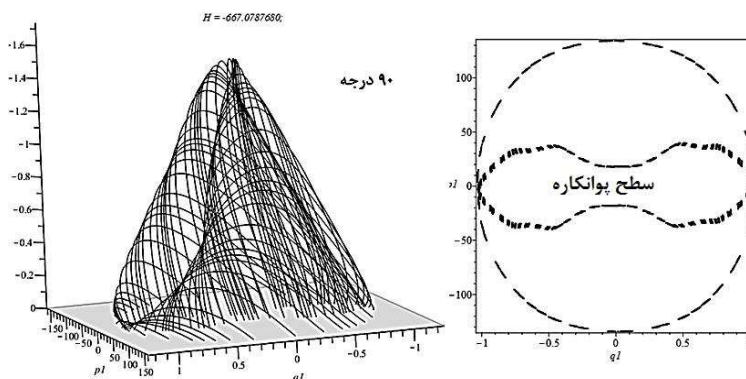
مورد دوم: در شکل ۱۱ بررسی فضای فاز سه‌بعدی و سطح پوانکاره برای انحراف آونگ بیرونی به اندازه‌ی ۳۰ درجه اختصاص یافته است. با توجه به نمودار به درستی مشخص است که تغییر حالت فضای فاز به دلیل تغییر شرایط اولیه است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود، دو ناحیه جدا شده در مورد قبلی در اینجا افزون بر تغییر شکل و افزایش مساحت، همدیگر را قطع کرده‌اند. تغییر این نواحی (جزیره‌ها) نشان از تغییر رفتار سامانه به دلیل افزایش سطح انرژی است، اگرچه هنوز رفتار آشوبناک مشاهده نمی‌شود. نکته‌ی بعدی اینکه در شکل سمت چپ، به هریک از این خطوط که از صفحه‌ی $q_2 = 0$ عبور کرده یک مدار^۱ گفته می‌شود. این مدارها اطراف نقاط تعادل سامانه در حال طی مسیر هستند.



شکل ۱۱ فضای فاز سه‌بعدی (سمت چپ) و سطح پوانکاره (سمت راست) برای آونگ دوگانه - مورد دوم.

^۱ Orbit

مورد سوم: افزایش زاویه‌ی انحراف آونگ دوم از ۳۰ به ۹۰ درجه منجر به افزایش سطح انرژی خواهد شد، شکل ۱۲. تغییر شرایط اولیه در این حالت افزون بر اینکه سطح انرژی را به اندازه ۲۸۵ ژول افزایش داده (جدول ۱)، همچنین سبب تغییرات زیاد در الگوی فضای فاز خواهد شد. اگرچه هنوز شباهت نسبی بین این مورد و مورد دوم در حالت فضای فاز وجود دارد، اما تغییر چشمگیر را می‌توان توسط سطح پوانکاره مشاهده کرد. همان‌طور که از شکل ملاحظه می‌شود، ناحیه مشترک بیضی شکل بین دو جزیره شکل داده و افزون بر آن، اثری که هر یک از مدارها بعد از عبور از سطح پوانکاره به‌جا می‌گذارند، دارای بریدگی است که در حقیقت به رفتار شبه دوره‌ای اشاره دارد. اگر به اندازه‌ی کافی به سامانه زمان داده شود تا نوسان کند، احتمال اینکه این فواصل خالی پر شوند بسیار زیاد است.

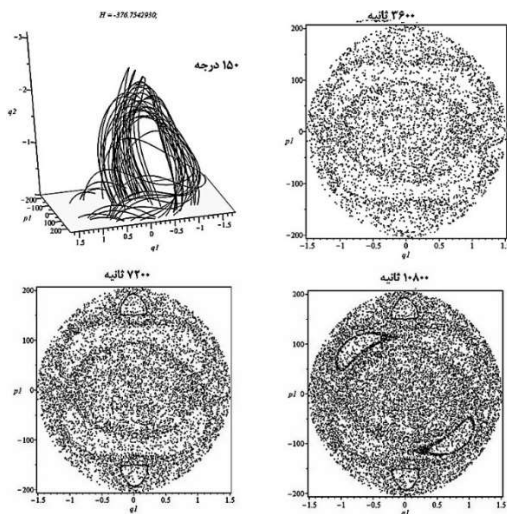


شکل ۱۲ فضای فاز سه‌بعدی (سمت چپ) و سطح پوانکاره برای آونگ دوگانه با انحراف‌های صفر و ۹۰ درجه. **مورد چهارم:** آخرین مورد بررسی شده برای انحراف، زاویه‌ی ۱۵۰ درجه هست، شکل ۱۳. در اینجا برای بررسی بهتر رفتار سامانه در طول زمان سطوح پوانکاره برای سه زمان مختلف ۳۶۰۰، ۷۲۰۰، ۱۰۸۰۰ ثانیه، ترسیم شده است. با توجه به اینکه به هم‌ریختگی در ساختار فضای فاز نسبت به موارد بررسی شده به درستی قابل مشاهده است، پیش‌بینی رفتار آشوبناک به دلیل افزایش سطح انرژی دور از انتظار نیست. در حقیقت، مقدار انرژی سامانه در این حالت به ترتیب در حدود ۲/۵ و ۱/۸ برابر موارد دوم و سوم است. با توجه به سطوح انرژی به دست آمده ملاحظه می‌گردد که تعداد زیادی نقطه در سرتاسر ناحیه‌ی دایره‌ی شکل پراکنده شده‌اند. وجود چنین نشانه‌هایی دلیلی بر گذار از حالت شبه‌دوره‌ای به حالت آشوبناک است.

در مورد چهارم چون تعداد نقاط در روی سطح خیلی زیاد و پراکنده است و همچنین رفتار سامانه غیرقابل پیش‌بینی است، در نتیجه برای استخراج نتایج بهتر، محاسبات برای سه مدت زمانی متفاوت



انجام شده است. بعد از گذشت ۳۶۰۰ ثانیه (یک ساعت اول) از نوسان آونگ دوگانه، تعدادی نقاط پراکنده غیریکنواخت به وجود آمد. می‌توان با مشاهده شکل پی برد که در بعضی از قسمت‌های سطح، تجمع این نقاط بیش از سایر قسمت‌ها است. این یعنی احتمال عبور دوباره مدارها در مجاورت چنین نقاطی در زمان‌های بعدی بیشتر از بخش‌های با تراکم پایین است. در ۳۶۰۰ ثانیه دوم، تعداد این نقاط بیشتر شده است، اگرچه شاهد تشکیل نواحی کوچکی در بالا و پایین محدوده‌ی عبور فضای فاز هستیم. این نواحی کوچک معروف به جزیره خبر از وجود تشدید می‌دهند. درحقیقت، در داخل این جزیره‌های کوچک شاهد نقاطی هستیم که نشان از رفتار آشوبناک دارند [۲۸ و ۲۹]. در بررسی سامانه‌های غیرخطی زمان پارامتر بسیار مهمی است، به‌عنوان مثال در اینجا هنگامی که زمان حرکت را به ۱۰۸۰۰ ثانیه افزایش می‌دهیم جزیره‌ها جدید تشکیل می‌شوند که دارای تقارن مرکزی نسبت به همدیگرند. به‌صورت کلی، همان‌طور که نتایج نشان می‌دهد افزایش سطح انرژی سبب گذار از حالت شبه‌دوره‌ای به آشوب شده که با گذشت زمان، در درون این آشوب جزیره‌های کوچکی ایجاد می‌گردد. به بیانی دیگر، به نظر می‌رسد یک رفتار منظم در درون یک رفتار آشوبناک در حال شکل‌گیری است!

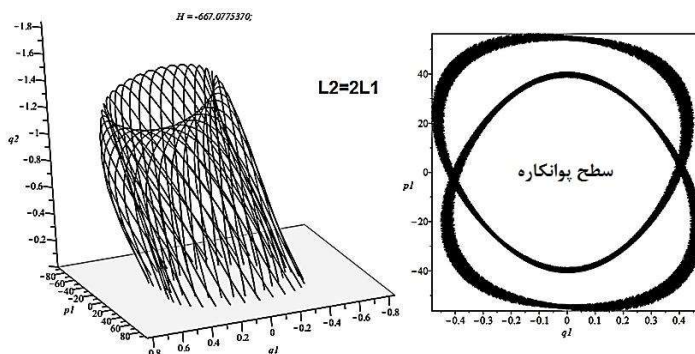


شکل ۱۳ فضای فاز سه‌بعدی (سمت چپ) و سطح پوانکاره برای آونگ دوگانه با زاویه انحراف ۱۵۰ درجه.

۴.۳ بررسی سطح پوانکاره برای طول $L_2=2L_1$ و جرم $m_2=2m_1$

در شکل ۱۴ فضای فاز و سطح پوانکاره برای زاویه انحراف ۹۰ درجه که در آن طول بازوی آونگ بیرونی دو برابر شده، ترسیم شده است. از لحاظ تصویر فضای فاز و سطح پوانکاره تفاوت بسیار

چشمگیری بین این دو حالت (شکل های ۱۲ و ۱۴) وجود دارد. با توجه به شکل ۱۴، در اینجا دو جزیره با مساحت بزرگ وجود دارند که نسبت به هم نامتقارن هستند. از طرف دیگر مرزی که این جزیره ها را تشکیل می دهد از لحاظ ضخامت یکسان نیستند. نکته ی جالب توجه، یکسان بودن سطح انرژی برای هر دو مورد است، اگرچه با وجود این هم سطح بودن، انرژی الگوی پوانکاره برای دو حالت یکسان نیست، جدول ۱. از این رو، نتیجه می گیریم که افزون بر شرایط اولیه، تغییر در ساختار هندسی سامانه، می تواند رفتار آونگ ها را تغییر دهد.

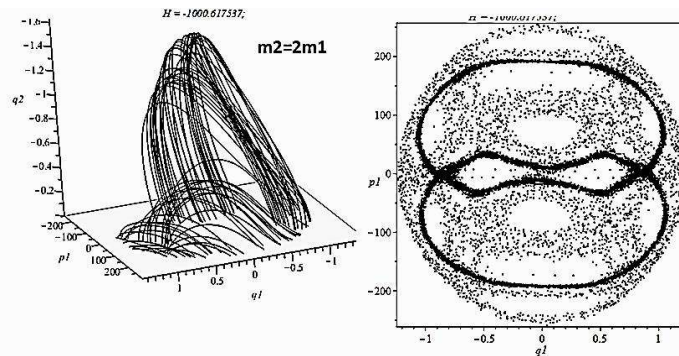


شکل ۱۴ فضای فاز سه بعدی (سمت چپ) و سطح پوانکاره (سمت راست) برای آونگ دو گانه با انحراف ۹۰ درجه و $L_2=2L_1$.

در شکل ۱۵ الگوهای فضای فاز و سطح پوانکاره برای حالتی که جرم آونگ دوم دو برابر می شود، به تصویر کشیده شده است. تغییر بسیار زیاد در مسیر حرکت مدارها نشان می دهد که اتفاق جدید در رفتار سامانه رخ داده است که این رفتار جدید گذار به حالت آشوب است. همان طور که در سطح پوانکاره از شکل مشخص است، اثری که هر یک از این مدارها از خود به جای می گذارند، به صورت نقاط پراکنده است. نکته ای مهم قابل مشاهده در اینجا، وجود تقارن در سطح است، یعنی با وجود رفتار آشوبناک، تقارن به هم نخورده است. نکته ی دیگر به کاهش سطح انرژی مربوط است. در مطالب پیشین به این نکته اشاره شد که نتیجه ی افزایش سطح انرژی، رفتار نامنظم را به دنبال دارد اما در اینجا با وجود داشتن سطح انرژی پایین تر نسبت به مدل مشابه (مورد سوم شکل ۱۲) رفتار غیرقابل پیش بینی و آشوبناک مشخص است. از این رو، اشاره به این نکته ضروری است که با تغییر در پارامترهای سامانه، چون طول میله ها و یا جرم های متصل به آنها، احتمال تغییر در رفتار سامانه وجود دارد. افزون بر این، در مقایسه سطح پوانکاره در این مدل با مورد سوم ملاحظه می گردد که مساحت ناحیه ی مشترک بین قسمت بالا و پائین کاهش یافته و به صورت کلی تغییر شکل داده است.



همچنین تعدادی جزیره‌ی کوچک (نواحی سفیدرنگ) وجود دارد که توسط نقاط پراکنده احاطه شده‌اند.



شکل ۱۵ فضای فاز سه‌بعدی (سمت چپ) و سطح پوانکاره (سمت راست) برای آونگ دوگانه با انحراف ۹۰ درجه و $m_2=2m_1$

جدول ۱ مشخصات آونگ دوگانه و مقادیر سطح انرژی سامانه در حالت‌های مختلف.

سطح انرژی مکانیکی (E[J])	طول بازو و جرم آونگ		زاویه انحراف آونگ [درجه]		حالت	
	بیرونی	درونی	بیرونی	درونی		
-۹۹۲	ثابت	ثابت	۱۲	۶	اول	شرایط اولیه
-۹۵۷	ثابت	ثابت	۳۰	۰	دوم	
-۶۶۷	ثابت	ثابت	۹۰	۰	سوم	
-۳۷۶	ثابت	ثابت	۱۵۰	۰	چهارم	
-۶۶۷	دو برابر	ثابت	۹۰	۰	طول	هندسه
-۱۰۰۰	دو برابر	ثابت	۹۰	۰	جرم	

۴. نتیجه‌گیری

نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی نشان می‌دهد که افزایش زاویه‌ی انحراف بیرونی در آونگ دوگانه، سبب تغییر رفتار سامانه از حالت دوره‌ای (انحراف بسیار کوچک) به شبه‌دوره‌ای (زاویه‌های ۳۰ تا ۹۰ درجه) و همچنین گذار از حالت شبه‌دوره‌ای به حالت آشوبناک (زاویه‌هایی بیشتر از ۹۰ درجه) می‌شود. به‌صورتی که در حالت چهارم (زاویه‌ی انحراف ۱۵۰ درجه)، با گذشت زمان نواحی بسته‌ای در حال شکل‌گیری است که احتمال تشکیل یک رفتار منظم را می‌دهد. افزون بر این، میزان افزایش

سطح انرژی مکانیکی در حالت چهارم نسبت به حالت اول بیش از ۶۰۰ ژول می‌باشد. افزایش پارامترهای طول و جرم آونگ بیرونی اثر چشمگیری بر جهت‌گیری رفتار آونگ دوگانه دارد. افزایش طول بازوی دوم به دو برابر بازوی اول، اگرچه به لحاظ سطح انرژی باحالت سوم برابر است، اما رفتار متفاوتی از خود را نشان می‌دهد. با تغییر جرم آونگ دوم به دو برابر آونگ اول، رفتار سامانه به سمت آشوبناک جابه‌جا شده و همچنین میزان سطح انرژی نسبت به تمام حالت‌های محاسبه‌شده کاهش می‌یابد. این نتیجه نشان می‌دهد که افزون بر شرایط اولیه، تغییر در هندسه‌ی سامانه می‌تواند تا مقدار زیادی در تعیین رفتار سامانه نقش داشته باشد. در کنار موارد اشاره‌شده، تغییر مقدار بسامد و تعداد مدها از دیگر پیامدهای تغییر شرایط اولیه است. نتایج محاسبات نشان می‌دهد میزان تغییرات بسامد در حالتی که هندسه‌ی آونگ‌ها تغییر می‌کند نسبت به حالتی که تنها شرایط اولیه متغیر است، بیشتر است. به‌صورتی که بیشترین بسامد در حالتی است که جرم آونگ دوم افزایش یافته است.

۵. تقدیر و تشکر

از معاون آموزشی دانشگاه پیام نور مرکز سنندج جناب آقای دکتر غریبی که ما را در انجام این تحقیق یاری کردند، صمیمانه تشکر می‌کنیم.

منابع

- [1] Fowles, G. R., *Introduction to modern optics*: Courier Corporation, 1989.
- [2] Thornton, S. T., & Marion, J. B., *Classical dynamics of particles and systems*: Cengage Learning, 2021.
- [3] French, A. P. *Vibrations and waves*: CRC press, 2017. <https://doi.org/10.1201/9781315273372>.
- [4] Razavizadeh, N., *Physics of wave and vibrations*, Mofid Corporation, (in Persian), 2003.
- [5] Qasemi, H., Khosravizadeh, S., *Solved Problems in Analytical Mechanics*, Daneshnegar Publication, First Edition, (in Persian), 2003.
- [6] Pook, L. P., *Understanding pendulums: a brief introduction*: Springer, 2011.
- [7] Maiti, S., Roy, J., Mallik, A. K., & Bhattacharjee, J. K., Nonlinear dynamics of a rotating double pendulum. *Physics Letters A*, 380(3), 408-412, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.11.003>.
- [8] Roy, J., Mallik, A. K., & Bhattacharjee, J. K., Role of initial conditions in the dynamics of a double pendulum at low energies. *Nonlinear Dynamics*, 73(1), 993-1004, 2013. <https://doi.org/10.1007/s11071-013-0848-1>
- [9] Stachowiak, T., & Okada, T., A numerical analysis of chaos in the double pendulum. *Chaos, Solitons & Fractals*, 29(2), 417-422, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.08.032>



- [10] Espíndola, R., Del Valle, G., Hernández, G., Pineda, I., Muciño, D., Díaz, P., & Guijosa, S., *The Double Pendulum of Variable Mass: Numerical Study for different cases*. Paper presented at the Journal of Physics: Conference Series, 2019. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1221/1/012049>
- [11] Razavi, S.E., Ghaderi, F., *numerical simulation of chaotic behavior in double pendulum with moving pivot*, Sharif Mechanical Engineering Journal Volume 29, Issue 2, Page 33-38, 2012.
- [12] Sun, Ning, et al. "An energy-optimal solution for transportation control of cranes with double pendulum dynamics: Design and experiments." *Mechanical Systems and Signal Processing* 102: 87-101, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.09.027>. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.09.027>
- [13] Kiyoumars, Arash, et al. "The mathematical modeling of a double-pendulum system as a physical model of flexible arm robot." 2007 IEEE International Conference on Control and Automation. IEEE, 2007. <https://doi.org/10.1109/ICCA.2007.4376692>.
- [14] Kibble, T., & Berkshire, F. H. *Classical mechanics*: world scientific publishing company, 2004.
- [15] Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J., *Classical mechanics*. In: American Association of Physics Teachers, 2002.
- [16] Greiner, W., & Bromley, D. A. *Classical mechanics: systems of particles and Hamiltonian dynamics*: Springer, 2003.
- [17] Kovacic, I., Zukovic, M., & Radomirovic, D. *Normal modes of a double pendulum at low energy levels. Nonlinear Dynamics*, 99(3), 1893-1908, 2020. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05424-5>
- [18] Ingard, K. U. *Fundamentals of waves and oscillations*: Cambridge University Press, 1988.
- [19] www.comsol.com. (2022)
- [20] Gustafsson, B. *Fundamentals of scientific computing*. Springer Science & Business Media; Vol. 8, 2011.
- [21] Logan, D. L., *A first course in the finite element method*. Cengage Learning, 2016.
- [22] Epperson, J. F., *An introduction to numerical methods and analysis*. John Wiley & Sons, 2021.
- [23] Feldman, D., *Chaos and dynamical systems*. Princeton University Press, 2019.
- [24] Gleick, J., Berry, M. J. N., *Chaos-making a new science*, 1987.
- [25] Esfandiari, R. S.; Lu, B., *Modeling and analysis of dynamic systems*. CRC press, 2018. <https://doi.org/10.1201/b22138>
- [26] www.maplesoft.com. (2022)
- [27] Tolstov, G. P. *Fourier series*: Courier Corporation, 2012.
- [28] Gleick, J., Berry, M., *Chaos-making a new science. Nature*, 330, 293, 1987.
- [29] Lynch, S. *Dynamical systems with applications using MATLAB*: Springer, 2004.



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

