

Research Paper

# Transport Through Potential and Magnetic Barriers on Topological Insulator Surfaces with Hexagonal Warping Effects<sup>1</sup>

Masomeh Arabikhah<sup>2</sup>

Received: 2022.05.04

Revised: 2022.07.19

Accepted: 2022.09.02

## Abstract

The transport properties of the Dirac fermions through the electric and magnetic barriers on the surface of a 3D topological insulator with a hexagonal warping effect have been investigated using the transfer matrix method. It was found that the transmission probability and the electric conductance are strongly modulated by the gate voltage, incident energy, number of barriers, and the exchange field strength. It was remarkable that the Dirac fermion is not perfectly transmitted at the normal incidence, confirming the role of the proximity effect in the suppression of transmission for normal incident electrons. The magnetic field can open up a band gap in the conductance spectrum at the Dirac point, depending on the magnetization orientation. The time-reversal symmetry remains broken as long as the magnetization orientations in modulated regions are not entirely parallel to the surface of a topological insulator. The resonant states and the position of resonant peaks are dependent on the gate voltage and incident energy values. It is shown that the number of tunneling resonances increases with increasing the number of barriers. The hexagonal warping effect can increase electronic transport at high energies. The results found here are consistent with those obtained previously.

**Keywords:** *Topological Insulators, Surface States, Electronic Transport, Potential and Magnetic Barriers, Hexagonal Warping Effect.*

---

<sup>1</sup> DOI: 10.22051/ijap.2023.40108.1280

<sup>2</sup> Assistant Professor, Department of Physics, Payame Noor University, Tehran, Iran. E-mail: arabikhah@pnu.ac.ir.

## ترابرد سطحی عایق توپولوژیک با تاییدگی (وارپینگ) شش ضلعی در حضور سدهای الکتریکی و مغناطیسی<sup>۱</sup>

معصومه عربی خواه<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۱۴

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۰۴/۲۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۱۱

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران

دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا

سال سیزدهم، پیاپی ۳۲، بهار ۱۴۰۲

صص ۴۶ - ۶۰

### چکیده:

ویژگی‌های ترابرد فرم‌یون‌های دیراک در سطح یک عایق توپولوژیک سه بعدی با آثار وارپینگ در حضور سدهای الکتریکی و مغناطیسی با استفاده از روش ماتریس انتقال بررسی شده است. نتایج بیانگر این است که احتمال عبور و رسانندگی با ولتاژ هدایت، زاویه فرودی الکترون‌ها، تعداد سدها و شدت میدان تبادلی قابل تنظیم است. در احتمال عبور نسبت به زاویه فرودی الکترون‌ها مشخص شده است که برای الکترون‌های فرودی عمودی، عبور کامل وجود ندارد. این رفتار، نقش اثر مجاورت مغناطیسی در کم شدن شدت عبور را تأیید می‌کند. در طیف رسانندگی، میدان مغناطیسی می‌تواند یک شکاف نواری در نقطه دیراک باز کند که به جهت مغناطش بستگی داشته و تا زمانی که جهت‌های مغناطش کامل موازی با سطح عایق نباشد، تقارن وارونی زمان شکسته باقی می‌ماند. مکان و شدت قله‌های تشدید به مقادیر ولتاژ هدایت و انرژی فرودی بستگی دارد. با افزایش تعداد کل سدها مشخص شده است که تعداد قله‌های عبور افزایش می‌یابد. در حضور آثار وارپینگ شش ضلعی نشان داده شده است که با افزایش انرژی، ترابرد الکتریکی نیز افزایش یافته است. نتایج به دست آمده از این مطالعه با نتایجی که از پیش در این زمینه در اختیار است، همخوانی دارد.

**واژگان کلیدی:** عایق‌های توپولوژیک، حالت‌های سطحی، ترابرد الکتریکی، سدهای الکتریکی و مغناطیسی، وارپینگ شش ضلعی.

<sup>۱</sup> DOI: 10.22051/ijap.2023.40108.1280

<sup>۲</sup> استادیار، گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. Email: arabikhah@pnu.ac.ir



## ۱. مقدمه

بررسی عایق‌های توپولوژیکی در چند سال اخیر مورد توجه زیادی قرار گرفته است. عایق‌های توپولوژیکی سه بعدی موادی هستند که حالت‌های سطحی آن‌ها رسانشی است درحالی که حالت‌های حجمی عایق دارند. وجود برهم کنش اسپین-مدار قوی در این دسته از مواد سبب بروز ویژگی‌های فیزیکی قابل توجهی شده است. حالت‌های رسانشی در این گونه مواد تا زمانی که تقارن وارون زمانی شکسته نشود حفظ می‌شوند [۱-۳].

ترابرد کوانتومی این عایق‌ها یکی از مباحث مهم در فیزیک ماده چگال است و نتایج بدست آمده از پژوهش‌ها منجر به ایده‌های نوین و کاربرد این مواد در اسپینترونیک، دستگاه‌های نوری و الکترونیک شده است. برای تحقق بیشتر کاربردهای این مواد، هدایت و تنظیم ویژگی‌های ترابرد فرمیون‌های دیراک در سطح عایق از اهمیت بسزایی برخوردار است. ولتاژهای هدایت یا میدان‌های مغناطیسی خارجی با تشکیل سدهای الکتریکی و یا مغناطیسی می‌توانند در رفتار انتشار فرمیون‌های دیراک بر روی سطح عایق توپولوژیکی مؤثر باشند [۴-۸]. در پژوهش‌های نظری و با استفاده از روش ماتریس انتقال، ویژگی‌های ترابرد الکترون‌های دیراک روی سطح عایق توپولوژیکی سه بعدی مطالعه و نشان داده شده است که عدم توازن بین ترابرد ساختارهای مغناطیسی موازی و پادموازی در ابرشبکه‌های الکترومغناطیس وجود دارد [۴،۵]. افزون بر این، با استفاده از سدهای الکتریکی و مغناطیسی می‌توان ویژگی‌های قابل هدایت پرتوهای الکترون را مشخص نمود [۴]. در اتصالات پله‌ای<sup>۱</sup>، ابرشبکه‌ها و چاه‌های کوانتومی بر روی سطح عایق‌های توپولوژیکی، مشخص شده است که ترابرد الکترون‌ها برحسب زاویه فرود نوسانی است به صورتی که شبیه تداخل فابری-پرو<sup>۲</sup> در اپتیک می‌باشد [۶]. ویژگی‌های ترابرد الکتریکی اتصال فرومغناطیس / غیرمغناطیس / فرومغناطیس در روی سطح عایق توپولوژیکی نشان داد که رسانندگی با پهنای قسمت غیرمغناطیس و ولتاژ هدایت همانند ترانزیستور اثر-میدان اسپینی<sup>۳</sup> نوسان می‌کند [۸].

هامیلتونی در سطح عایق‌های توپولوژیکی سه بعدی برای الکترون‌های با انرژی پایین به خوبی با معادله دیراک بیان می‌شوند. اگرچه، با افزایش انرژی فرمی طیف انرژی الکترونی دستخوش تغییراتی می‌شود که در این حالت معادله دیراک به تنهایی توانایی بیان حقیقت این مواد را ندارد.

<sup>1</sup> Step junction

<sup>2</sup> Fabry-Perot

<sup>3</sup> Spin field-effect transistor

در آزمایش‌های طیف‌سنجی نور گسیل با جداسازی زاویه‌ای و محاسبات ساختار نواری مشخص شده است که عایق توپولوژیک سه بعدی مانند  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ ، تنها یک مخروط دیراک روی سطحش دارد و با افزایش انرژی فرمی در بالاترین نقطه دیراک از حالت دایروی به هگزاگونال و سپس به شکل دانه برف<sup>۱</sup> تغییر می‌کند [۹]. این پدیده اثر وارپینگ شش ضلعی نام دارد که بیرون از نقطه دیراک با اضافه کردن تصحیحات غیرخطی به رابطه پاشندگی بیان می‌شود [۱۱، ۱۰]. شکاف نواری انرژی و تقارن بلور در طیف پاشندگی سطحی به شدت وارپینگ وابسته نیست [۹، ۱۰]، اگرچه وارپینگ شش ضلعی سبب تغییرات چشمگیری در رسانندگی DC [۱۲] و رسانندگی اپتیکی می‌شود [۱۳]. به تازگی، ویژگی‌های ترابرد عایق‌های توپولوژیک در حالت‌های سطحی و با حضور آثار وارپینگ مورد بررسی قرار گرفته است [۲۱-۱۴]. برای نمونه، نتایج پراکندگی از نقص‌های پله‌ای<sup>۲</sup> مستقیم روی سطح عایق توپولوژیک  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  نشان داد که در انرژی‌های بالا که آثار وارپینگ چشمگیر است، چندین اندازه حرکت بحرانی در پربند سطوح هم انرژی یافت می‌شود [۱۴]. در بررسی پراکندگی الکترون‌های دیراک در روی سطح یک عایق توپولوژیک دو سدی با مجاورت مغناطیسی، ولتاژ هدایت و آثار وارپینگ نشان داده شده است که در ساختارهای مغناطیسی موازی و پاد موازی، به سبب تداخل کوانتومی امواج انتشاری در ناحیه بین دو بخش مغناطیسی، رفتار نوسانی ناهمفازی در رسانایی وابسته به انرژی مشاهده می‌شود [۲۰]. با استفاده از ماتریس انتقال در ابر شبکه-هایی از نقص‌های پله‌ای مستقیم روی سطح عایق توپولوژیک مشخص شده است که ویژگی‌های پراکندگی به دلیل آثار وارپینگ به جهت گسترش نقص‌ها بستگی خیلی زیادی دارد [۲۱]. از این رو، جهت مطالعه ویژگی‌های فیزیکی این مواد لازم است که جمله وارپینگ در هامیلتونی مسئله گنجانده شود.

در این مقاله ویژگی‌های ترابرد ساختارهای چند سدی مغناطیسی در سطح یک عایق توپولوژیک سه بعدی بررسی شده است که قابل تعمیم به شکل یک ابر شبکه مغناطیسی هستند. این سدها و حتی چاه‌های مغناطیسی به این شکل را می‌توان با اعمال یک ولتاژ هدایت مثبت یا منفی و همچنین با مجاورت قرار دادن این نواحی ولتاژی با یک ماده مغناطیسی تولید کرد. عایق توپولوژیک سه بعدی در نظر گرفته شده در این ساختار،  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  است که از آثار وارپینگ بالایی برخوردار می‌باشد و دارای یک نقطه دیراک روی سطحش است. ویژگی‌های ترابرد الکتریکی و احتمال عبور بر حسب

<sup>1</sup> Snowflake

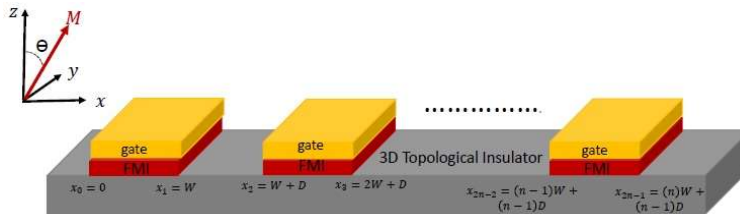
<sup>2</sup> Step defect



پارامترهای مختلف فیزیکی چون تعداد کل سدها، زاویه فرود، انرژی، شدت وارپینگ و آثار ناشی از مجاورت مغناطیسی سامانه بر روی ترابرد کوانتومی محاسبه شده است. هدف از این پژوهش پاسخ به این پرسش است که مقدار و جهت مغناطش در سدهای مغناطیسی چگونه می تواند احتمال عبور و بازتاب از سطح عایق توپولوژیک را متأثر سازد؟ ترابرد الکترون ها از سدهای مغناطیسی با پهنا و ارتفاع قابل تنظیم و در حضور وارپینگ چگونه است؟ موارد بیان شده در این ساختار چند سدی مغناطیسی با عایق توپولوژیک بیسموت تلوراید تا کنون گزارش نشده است.

## ۲. طرح و روش

عایق توپولوژیک سه بعدی  $Bi_2Te_3$  را در نظر می گیریم که دارای یک نقطه دیراک روی سطحش است و از آثار وارپینگ بالایی برخوردار می باشد. با تنظیم لایه فرمی روی حالت های سطحی می توان از برهم کنش بین حالت های سطحی و حجمی چشم پوشی کرد [۹]. از این رو، تنها حالت های سطحی را بررسی می کنیم که یکی از مهم ترین ویژگی های عایق توپولوژیک است. در سطح عایق توپولوژیک نواحی در نظر می گیریم که هر یک با پهنا  $W$  است. به صورتی که در این نواحی آثار همسایگی مغناطیسی و ولتاژ هدایت اجرا می شود و مطابق شکل ۱، با فاصله  $D$  از هم جدا شده اند.



شکل ۱ نمایش طرحواره ای از یک عایق توپولوژیک سه بعدی در حضور سدهای الکتریکی و مغناطیسی.

هامیلتونی مؤثر حالت های سطحی در نبود تقارن حفره- ذره و در واحد  $\hbar = 1$  به صورت زیر نوشته می شود [۱۴]:

$$\hat{H} = v_F(k_x \sigma_y - k_y \sigma_x) + \lambda(k_x^3 - 3k_x k_y^2) \sigma_z + V(x), \quad (1)$$

در این رابطه  $v_F$  سرعت فرمی،  $\lambda$  پارامتر وارپینگ و  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  نشانگر ماتریس های پائولی است.  $k_x = k \cos \beta$  و

$k_y = k \sin \beta$ ، مؤلفه های بردار موج در سطح و  $\beta$  زاویه فرودی الکترون ها در  $x = 0$  است. اولین جمله در معادله (۱)، فرمیون های دیراک هلیکال روی سطح عایق توپولوژیک و دومین جمله، آثار تاییدگی شش ضلعی را بیان می کنند. در رابطه بالا  $V(x)$  عبارت است از:

$$V(x) = (U + \Delta \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (2)$$

این رابطه بیانگر اثر مجاورت مغناطیسی از یک عایق فرومغناطیسی با جهت  $\mathbf{m} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  و اثر ولتاژ هدایت  $U$  است. سدهای مغناطیسی در نواحی  $x$  با محدوده  $(n-1)D \leq x \leq nW + (n-1)D$  اعمال شده است که در آن  $n = 1, \dots, N$ ،  $n$  امین سد و  $N$  تعداد کل سدها است.  $\theta$  زاویه قطبی نسبت به محور  $Z$  و  $\varphi$  زاویه سمتی نسبت به محور  $X$  است. همچنین  $\Delta$  انرژی تبدیلی مجاورت مغناطیسی می باشد. برای الکترون فرودی با انرژی  $E$  می توان ولتاژ هدایت را به صورت یک سد پتانسیل ( $U > 0$ ) در نظر گرفت.

طیف پاشندگی انرژی برای حالت های سطحی عایق توپولوژیک در حضور آثار ولتاژ هدایت و مجاورت مغناطیسی به صورت زیر به دست می آید:

$$E(\mathbf{k}) = U + s\epsilon(\mathbf{k}), \quad (3)$$

و  $\epsilon(\mathbf{k})$  برابر است با:

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \sqrt{[\lambda(k_x^3 - 3k_x k_y^2) + \Delta \cos \theta]^2 + A}, \quad (4)$$

که در آن،  $A = (\Delta \sin \theta \cos \varphi - v_F k_y)^2 + (\Delta \sin \theta \sin \varphi + v_F k_x)^2$  و  $s = \pm$ ، نشانگر نواررسانش و ظرفیت است. در این مقاله فرض شده است که سطح فرمی در نوار رسانش  $(s = +1)$  قرار دارد.

با جایگذاری رابطه  $(k_x^3 - 3k_x k_y^2) = k^3 \cos 3\beta$  در معادله (۴) خواهیم داشت:

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \sqrt{v_F^2 k^2 + \Delta^2 \sin^2 \theta - B + C}, \quad (5)$$

در این رابطه  $B = 2v_F k \Delta \sin \theta \sin(\beta - \varphi)$  و  $C = (\lambda k^3 \cos 3\beta + \Delta \cos \theta)^2$  است.



اکنون با جزئیات بیشتری ترابرد الکترون از ساختار اصلی، که در شکل ۱ نشان داده شده است، را بررسی می‌کنیم. یک الکترون با بردار موج  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$  و انرژی  $E$  در نظر می‌گیریم که از سمت چپ روی مرز بین ناحیه نرمال و ناحیه ولتاژی در  $x = 0$  فرود می‌آید. در این جا منظور از ناحیه نرمال به ناحیه‌ای از سطح گفته می‌شود که میدان مغناطیسی و ولتاژ خارجی اعمال نمی‌شود. انرژی و مؤلفه بردار موج در راستای  $y$  ثابت است و در فرآیند پراکندگی تغییر نمی‌کنند. رابطه  $E(q_x, q_y) = E_F$ ، معادله مرتبه ششم بر حسب  $q_x$  در نواحی نرمال ( $\Delta = 0, U = 0$ ) است که داری شش ریشه می‌باشد. اگر انرژی بیشتر از مقدار بحرانی ( $E_c \approx 377 \text{ meV}$ ) باشد، شش ریشه حقیقی هستند، در غیر این صورت دو ریشه حقیقی و بقیه ریشه‌ها موهومی می‌باشند [۱۴]. همچنین در ناحیه ولتاژی، شش ریشه از معادله  $E(k_x, k_y) = E_F$  بر حسب  $k_x$  به دست می‌آید. پس از حل معادله (۱) می‌توان ویژه مقادیر در ناحیه ولتاژی را به دست آورد که برابر است با [۲۰]:

$$u(\mathbf{k}_m, r) = \sqrt{\frac{|\varphi_{1m}|^2}{|\varphi_{1m}|^2 + |\varphi_{2m}|^2}} \left( \frac{1}{\varphi_{1m}} \right) e^{ik_{x,m}x} e^{ik_{y,m}y}, \quad (6)$$

که در آن  $\varphi_{1m}(k_{x,m}, k_y)$  و  $\varphi_{2m}(k_{x,m}, k_y)$  به صورت زیر معرفی شده‌اند:

$$\varphi_{1m}(k_{x,m}, k_y) = \Delta \cos \theta + \epsilon(\mathbf{k}) + \lambda k_{x,m} (k_{x,m}^2 - 3k_y^2), \quad (7)$$

$$\varphi_{2m}(k_{x,m}, k_y) = \Delta \sin \theta e^{i\phi} - v_F(k_y - ik_{x,m}), \quad (8)$$

در این روابط  $m = 1, \dots, 6$  است. از طرفی ویژه حالت‌های الکترون  $u(\mathbf{q}_m, \mathbf{r})$  در ناحیه نرمال، شبیه رابطه (۶) به دست می‌آید. بنابراین برای یک الکترون فرودی با انرژی  $E_F$ ، تابع موج برای اولین ناحیه نرمال در سمت چپ  $\psi_0(\mathbf{r})$ ، توابع موج در نواحی بیرون از سد ها  $\psi_{2n}(\mathbf{r})$  و نواحی داخل سد ها  $\psi_{2n-1}(\mathbf{r})$  عبارت‌اند از:

$$\psi_0(\mathbf{r}) = u(q_x^i, q_y) + \sum_{m=1}^3 r_m u(q_{x,m}^r, q_y) \quad x \leq 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2n}(\mathbf{r}) &= \sum_{m=1}^3 f_{m,2n} u(q_{x,m}^r, q_y) + \sum_{m=1}^3 g_{m,2n} u(q_{x,m}^t, q_y) \\ n &= 1, 2, \dots, N-1, \quad nW + (n-1)D \leq x \leq nW + nD, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2n}(\mathbf{r}) &= \sum_{m=1}^3 t_m u(q_{x,m}^t, q_y) & n = N, \\ x &\geq (N-1)D + NW, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2n-1}(\mathbf{r}) &= \sum_{m=1}^6 s_{m,2n-1} u(k_{x,m}, k_y) & n = 1, 2, \dots, N \\ (n-1)W + (n-1)D &\leq x \leq nW + (n-1)D \end{aligned} \quad (12)$$

در این روابط  $N$  تعداد کل سدها،  $u(q_x^i, q_y)$  ویژه حالت فرودی،  $\Gamma_m$  ضرایب عبور با ویژه حالت  $u(q_{x,m}^r, q_y)$  برای اولین ناحیه نرمال در سمت چپ،  $t_m$  ضرایب عبور با ویژه حالت  $u(q_{x,m}^t, q_y)$  برای آخرین ناحیه نرمال در سمت راست است.  $f_{m,2n}$  و  $g_{m,2n}$  به ترتیب ضرایب بازتاب و عبور برای برای نواحی نرمال بین سدها و  $s_{m,2n-1}$  ضرایب پراکندگی در نواحی ولتاژی (داخل سدها) با ویژه حالت  $u(k_{x,m}, k_y)$  می‌باشد.

در حالتی که،  $E_F < E_C$  و یا این که  $E_F > E_C$  باشد، جواب معادله  $E(q_x, q_y) = E_F$  برای مقادیر ثابتی از  $E_F$  و  $q_y$  متفاوت است. اگر  $E_F < E_C$  باشد در این صورت معادله دارای دو ریشه حقیقی و چهار ریشه موهومی است. چون بردار موج ورودی  $q^i$  حقیقی است بنابراین شرایط برای بردار موج بازتابی  $q^r$  و موج عبوری  $q^t$  به صورت  $q_x^t = q_x^r = -q_x^i$  (ریشه‌های حقیقی) و  $q_{x,2(3)}^t = -q_{x,2(3)}^r$  (ریشه‌های موهومی) انتخاب می‌شود [۱۴]. در حالت  $E_F > E_C$ ، همه ریشه‌ها حقیقی (با سه ریشه مثبت و سه ریشه منفی با مقادیر قدر مطلق یکسان) است به صورتی که دو ریشه با موج انتشار حفره گونه  $q_x v_x(q) < 0$  و چهار ریشه دارای موج انتشار الکترون گونه  $q_x v_x(q) > 0$  است. با فرض این که بردار موج ورودی حقیقی است، بردارهای موج بازتابی و عبوری با شرایط  $q_x^i = q_x^t = -q_x^r$ ،  $q_{x,2(3)}^t = -q_{x,2(3)}^r$ ،  $q_{x,1(2)}^t > 0$ ،  $q_{x,3}^t < 0$  و  $v_x(q_{x,m}^t, q_y) > 0$  انتخاب می‌شوند [۱۶]. در این روابط  $\frac{\partial E}{\partial q_x}$  سرعت گروه الکترون در امتداد محور  $x$  است.

رابطه هامیلتونی (۱)، معادله دیفرانسیل مرتبه سوم بر حسب  $k_x$  است، در نتیجه شرایط مرزی با روابط زیر برقرار خواهد بود [۱۴]:

$$\begin{aligned} \psi_l(\mathbf{r})|_{r=(x_l, y)} &= \psi_{l+1}(\mathbf{r})|_{r=(x_l, y)}, \\ \partial_x \psi_l(\mathbf{r})|_{r=(x_l, y)} &= \partial_x \psi_{l+1}(\mathbf{r})|_{r=(x_l, y)}, \\ \partial_x^2 \psi_l(\mathbf{r})|_{r=(x_l, y)} &= \partial_x^2 \psi_{l+1}(\mathbf{r})|_{r=(x_l, y)} \end{aligned} \quad (13)$$





در این روابط مقادیر  $l$  برابر با  $0, 1, \dots, 2N$  است. با استفاده از شرایط مرزی بالا و روش ماتریس انتقال می توان همه ضرایب عبور و بازتاب را به دست آورد [۲۲، ۱۴]. نکته مورد اهمیت این است که در حالت  $E_F < E_C$ ، ضریب عبور کل برای الکترون های دارای انرژی  $E$  و زاویه فرودی  $\beta = \arctan\left(\frac{q_y}{q_x}\right)$  با رابطه  $T(E, \beta) = |t_1|^2$  داده می شود، در صورتی که برای حالت دوم ( $E_F > E_C$ ) ضریب عبور کل با رابطه  $T(E, \beta) = \sum_{i=1}^3 |t_i|^2$  محاسبه می شود. از این رو، با استفاده از معادله پیوستگی و با فرض تابع فرمی در دمای کم، رسانندگی  $G$  الکترون ها قابل محاسبه است. در این صورت خواهیم داشت [۲۰]:

$$G = g_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} T(E_F, \beta) F(k_F(\beta), \beta) d\beta, \quad (14)$$

$$F(k_F(\beta), \beta) = \frac{[2 B v_F^2 k_F^2 \cos \beta + \lambda k_F^3 (B^2 - v_F^2 k_F^2) \cos 2 \beta] v_F}{E_F (B^2 + v_F^2 k_F^2) \left[ \frac{dE(k, \beta)}{dk} \right]_{k_F(\beta)}}, \quad (15)$$

$$B = \lambda k_F^3 \cos 3 \beta + \sqrt{v_F^2 k_F^2 + \lambda^2 k_F^6 \cos^2 3 \beta}, \quad (16)$$

$$k_F = \sqrt{\left[ \sqrt{\frac{\kappa_2^3}{27} + \frac{\kappa_1^2}{4} + \frac{\kappa_1}{2}} \right]^{1/3} - \left[ \sqrt{\frac{\kappa_2^3}{27} + \frac{\kappa_1^2}{4} - \frac{\kappa_1}{2}} \right]^{1/3}}, \quad (17)$$

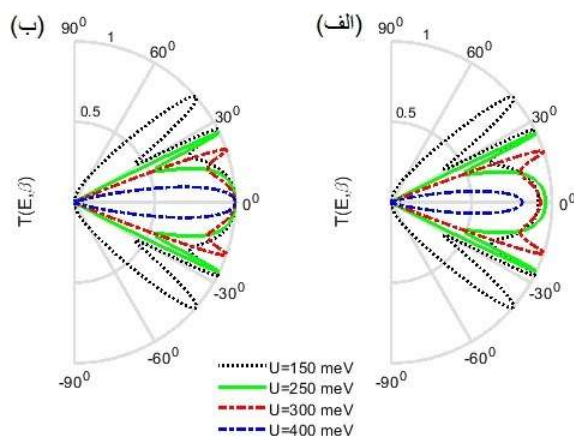
در روابط بالا  $\kappa_2 = \frac{v_F^2}{\lambda^2 \cos^2 3 \beta}$ ،  $\kappa_1 = \frac{E_F^2}{\lambda^2 \cos^2 3 \beta}$  بردار موج فرمی الکترون های فرودی و  $g_0 = \frac{e^2 E_F L y}{2 \pi^2 v_F}$  بعد رسانندگی با  $\hbar = 1$  است. بیشینه مقدار رسانندگی در بازه انتگرالی  $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  برابر با  $2g_0$  است.

### ۳. نتایج و بحث

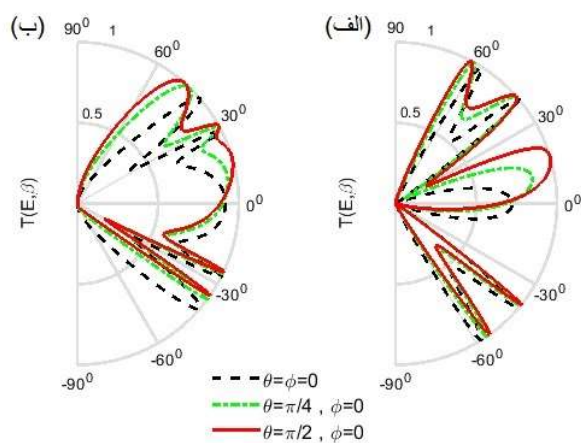
برای سطح فرمی  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  پارامترهای  $v_F = 2/55 \text{ eV } \text{Å}^\circ$  و  $\lambda = 250 \text{ eV } \text{Å}^\circ$  را انتخاب می کنیم که توافق خوبی با نتایج تجربی دارد [۹]. در این سامانه پراکندگی الکترون با شدت میدان تبادل  $\Delta$ ، ولتاژ هدایت اعمال شده  $U$ ، پهنای ناحیه ولتاژی  $W$ ، فاصله جدایی بین دو ناحیه ولتاژی  $D$  و تعداد کل سدها  $N$  مشخص می شود.

در شکل های ۲-الف و ب، احتمال عبور نسبت به زاویه فرودی الکترون ها به ترتیب در نبود و حضور مغناطش در حالتی رسم شده است که تعداد کل سدها  $N = 3$  است. همان طور که در شکل ۱-الف دیده می شود برای مقادیر مختلفی از ولتاژ هدایت در زاویه فرودی عمودی ( $\beta = 0$ )، عبور الکترون ها کامل است ( $T = 1$ ) و بنابراین اثر تونل زنی کلین را تأیید می کند [۲۴، ۲۳]. با

توجه به شکل ۱-ب، وقتی میدان مغناطیسی در جهت Z است، برای الکترون‌های فرودی عمودی ( $\beta = 0$ ) عبور کامل وجود ندارد که این رفتار، نقش اثر همسایگی در کم شدن شدت عبور برای الکترون‌های فرودی عمودی را تأیید می‌کند.



شکل ۲ احتمال عبور T برحسب زاویه فرودی  $\beta$  را با مقدار مغناطش الف ( $\Delta = 0$ ) و ب ( $\Delta = 40 \text{ meV}$ ) در زاویه  $\theta = \phi = 0$  نشان می‌دهد که برای ولتاژهای متفاوت رسم شده است. پارامترهای دیگر برابر است با:  $E = 250 \text{ meV}$ ،  $D = W = 2 \text{ nm}$  و  $N = 3$ .

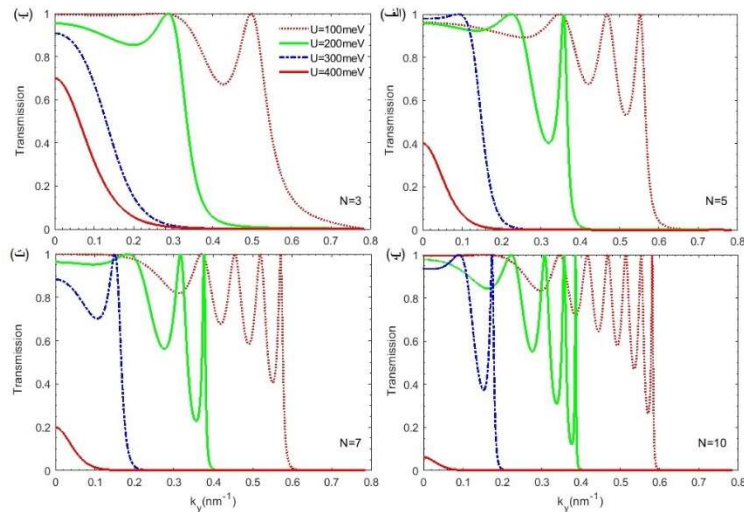


شکل ۳ احتمال عبور T برحسب زاویه فرودی  $\beta$  با زاویه‌های مختلف مغناطش را نشان می‌دهد که برای مقادیر الف ( $D = W = 2 \text{ nm}$ ) و ب ( $D = W = 3 \text{ nm}$ ) رسم شده است. پارامترهای دیگر برابر است با:  $U = 250 \text{ meV}$ ،  $\Delta = 40 \text{ meV}$ ،  $N = 3$  و  $E = 150 \text{ meV}$ .



نتایج به دست آمده از این مطالعه با نتایج تجربی و نظری که از پیش در این زمینه در اختیار است، همخوانی دارد [۱۴، ۱۶، ۱۸ و ۲۶]. همچنین با توجه به هر دو شکل می توان نتیجه گرفت که نمودار عبور نسبت به زاویه ( $\beta = 0$ ) متقارن است و تعداد قله های عبور با افزایش ولتاژ هدایت اعمال شده  $U$ ، کاهش می یابد.

شکل های ۳-الف و ب، احتمال عبور نسبت به زاویه فرودی الکترون ها در زاویه های مختلف مغناطش و برای مقادیر مختلفی از  $W$  و  $D$  رسم شده است. همانطور که از شکل ها دیده می شود، زمانی که  $m$  در نواحی ولتاژی از امتداد  $Z$  به امتداد  $X$  تغییر جهت می دهد، عبور کامل برای فرمیون های دیراک در زوایای غیر عمود  $\beta \neq 0$  ایجاد می شود [۲۳، ۲۵]. به این نکته باید توجه کرد که تقارن وارونی زمان روی سطح هر ناحیه، به جهت مغناطش در آن ناحیه بستگی دارد و تا زمانی که جهت های مغناطش سدها کامل در جهت  $X$  نباشد، تقارن وارونی زمان شکسته باقی می ماند. همچنین با توجه به هر دو شکل می توان نتیجه گرفت که اگر  $m$  در جهت  $Z$  باشد، نمودار عبور نسبت به زاویه ( $\beta = 0$ ) متقارن است و اگر مغناطش  $m$ ، مولفه غیر صفر در جهت  $Z$  داشته باشد، این تقارن شکسته می شود که با شکست تقارن آینه ای برای پربند با انرژی یکسان در جهت  $\Gamma - K$  همخوانی دارد [۲۰].

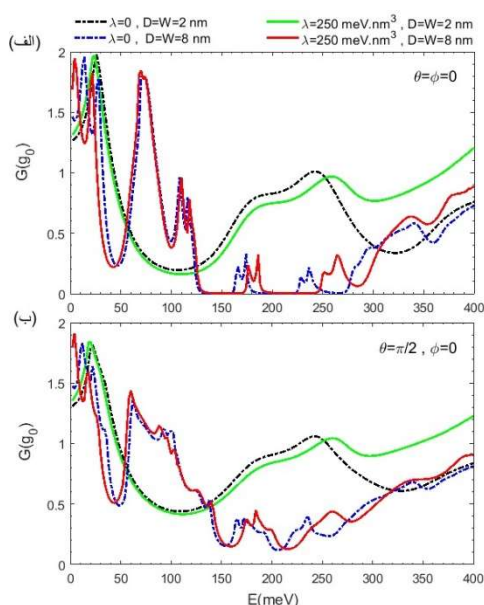


شکل ۴ احتمال عبور  $T$  بر حسب مؤلفه بردار موج  $k_y$  را نشان می دهد که برای ولتاژهای مختلف با تعداد کل سدهای

مختلف الف ( $N=3$ ، ب  $N=5$ ، ج  $N=7$  و د  $N=10$ ). رسم شده است. پارامترهای دیگر برابر است با:  $D =$

$$\Delta = 30 \text{ meV} \text{ و } E = 200 \text{ meV}, W = 2 \text{ nm}$$

برای بررسی آثار ولتاژ هدایت روی الکترون‌های عبوری، در شکل‌های ۴-الف، ب، پ و ت، احتمال عبور برحسب مؤلفه بردار موج  $k_y$  و برای مقادیر مختلفی از  $N$  رسم شده است. با توجه به شکل‌ها، مکان و شدت قله‌های تشدیدی به مقادیر ولتاژ هدایت و تعداد کل سدها بستگی دارد به صورتی که با افزایش  $N$ ، تعداد قله‌های عبور افزایش می‌یابد. برای مثال از مقایسه بین دو شکل ۴-الف و ۴-ت مشخص است برای هنگامی که در سطح عایق توپولوژیک ۱۰ سد مغناطیسی وجود دارد، تعداد قله‌های عبور بیشتر از حالت ۳ سدی است. همچنین با افزایش ولتاژ هدایت احتمال عبور کاهش می‌یابد به صورتی که مقدار آن برای  $U = 400 \text{ meV}$  و  $N = 10$  کمابیش برابر صفر است (شکل ۴-ت).

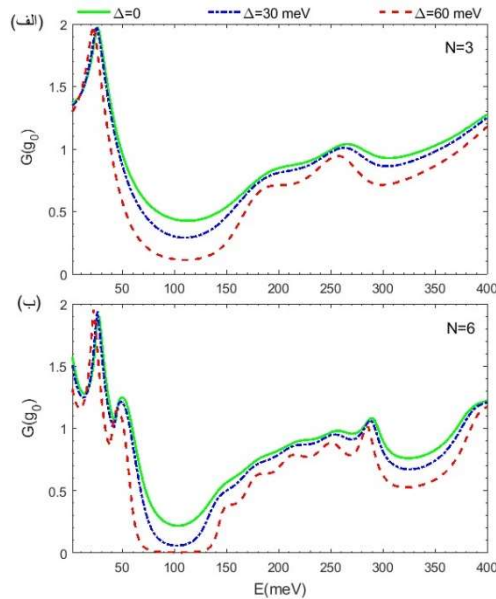


**شکل ۵** رسانندگی  $G$  برحسب تابعی از انرژی ورودی  $E$  در حضور و نبود آثار وارپینگ با مقادیر مختلفی از  $D$  و  $W$  و با زاویه مغناطش (الف)  $\theta = \phi = 0$  و (ب)  $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0$  رسم شده است. پارامترهای دیگر برابر است با:  $\Delta = 50 \text{ meV}$  و  $N = 3, U = 200 \text{ meV}$ .

رسانندگی  $G$  بر حسب انرژی با مقادیر مختلفی از  $D$  و  $W$  و با مغناطش‌های موازی در امتداد  $X$  و  $Z$  به ترتیب در شکل‌های ۵-الف و ب نشان داده شده است. در طیف رسانندگی چندین قله تشدیدی دیده می‌شود که صرف نظر از جهت مغناطش، موقعیت آن‌ها همزمان با تغییرات  $D$  و  $W$  جابجا می‌شود. هنگامی که مغناطش در جهت  $Z$  باشد ( $\theta = 0, \phi = 0$ )، رسانندگی اطراف  $E = U$



کمابیش به صفر می‌رسد و با افزایش  $D$  و  $W$ ، یک شکاف نواری در طیف رسانندگی باز می‌شود. این رفتار تأیید کننده شکست تقارن وارون زمان است که ناشی از مؤلفه عمودی  $m$  در نواحی ولتاژی است. در مقابل اگر مغناطش در جهت  $x$  باشد ( $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0$ )، برای طیف رسانندگی شکاف نواری باز نمی‌شود. کمترین مقدار رسانندگی بزرگ‌تر از  $0 / 1g_0$  است و تأیید می‌کند که به دلیل تقارن وارونی زمان، سامانه در همه انرژی‌های الکترون سطحی برای مثال  $E \leq U$  و  $E \geq U$  رسانا است. بنابراین نتایج بررسی‌ها بیانگر این است که ترابرد حالت‌های سطحی با ولتاژ هدایت و میدان تبدلی، بدون شکست تقارن وارون زمانی قابل تنظیم است و با جهت مغناطش، جریان بار الکترونی روی سطح عایق توپولوژیکی چند سدی قابل هدایت است. همچنین برای بررسی آثار وارپینگ در ترابرد الکترونی، رسانندگی را بر حسب انرژی فرودی در حضور و نبود جمله وارپینگ رسم شده است. رسانندگی در انرژی‌های کمتر با شدت وارپینگ تغییر نمی‌کند. در انرژی‌های بالاتر نسبت به نقطه دیراک، رسانندگی در حالت وارپینگ افزایش می‌یابد و همانطور که از شکل‌ها انتظار داریم، ناشی از شکل برف دانه‌ای پربند با انرژی یکسان است [۲۰].



شکل ۶ رسانندگی  $G$  بر حسب تابعی از انرژی ورودی  $E$  را برای مقادیر مختلفی از مقدار  $\Delta$  نشان می‌دهد که برای

(الف)  $N = 3$  و

(ب)  $N = 6$  رسم شده است. پارامترهای دیگر برابر است با:  $U = 0$  و  $\theta = \phi = 0$ ،  $W = d = 2 \text{ nm}$

.200 meV

شکل ۶-الف و ب، رسانندگی  $G$  بر حسب تابعی از انرژی ورودی  $E$  را برای مقادیر مختلفی از مقدار  $\Delta$  نشان می‌دهد که به ترتیب برای  $N = 3$  و  $N = 6$  رسم شده است. همان طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود، رسانندگی با افزایش میدان تبادلی و تعداد سدها، کاهش یافته است که این رفتار و اثر میدان مغناطیسی خارجی در اتصالات گرافن  $p - n - p$  مشاهده شده است [۲۵]. برای مثال در حالت  $\Delta = 60 \text{ meV}$  و  $N = 6$  یک شکاف انرژی در طیف رسانندگی وجود دارد، از این رو، اثر همسایگی مغناطیسی در سامانه سبب کاهش رسانندگی می‌شود.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله ویژگی‌های ترابرد الکتریکی در سطح یک عایق توپولوژیک سه بعدی مانند  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  و در حضور سدهای الکتریکی و مغناطیسی بررسی شده است که قابل تعمیم به شکل یک ابرشبکه مغناطیسی است. ابتدا هامیلتونی سامانه با توجه به شرایط و ویژگی‌های تعریف شده نوشته می‌شود. با استفاده از ویژه توابع، ویژه مقادیر و شرایط مرزی حاکم بر ساختار و با روش ماتریس انتقال، احتمال عبور، بازتاب و همچنین رسانایی بر حسب پارامترهای مختلف فیزیکی محاسبه شده است. محاسبات تحلیلی و نتایج عددی بدست آمده در ترابرد کوانتومی بیانگر این است که احتمال عبور و رسانندگی با ولتاژ هدایت، زاویه فرودی الکترون‌ها، تعداد سدها و شدت میدان تبادلی قابل تنظیم و هدایت است. ولتاژ هدایت در این ساختار می‌تواند حالت‌های تونل زنی تشدیدی در سطح یک عایق توپولوژیک تولید کند. حالت‌های تشدیدی به تعداد سدها بستگی زیادی دارد و رسانایی با افزایش تعداد سدها و همچنین میدان تبادلی، کاهش می‌یابد. در حالتی که مغناطش در امتداد محور  $X$  است، تقارن وارون زمانی شکسته نمی‌شود و سامانه برای همه انرژی‌های الکترون سطحی، رسانا باقی می‌ماند. در انرژی‌های بالا، آثار وارپینگ شش ضلعی سبب افزایش رسانایی می‌شود.

#### ۵. تقدیر و تشکر

نویسنده لازم می‌داند مراتب امتنان و قدردانی خود از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر علیرضا صفارزاده و جناب آقای دکتر امیر عباس صبوری دودران را صمیمانه ابراز نماید.



## منابع

- [1] Hasan M.Z., Kane C.L., Colloquim: Topological Insulators, *Reviews of Modern Physics*, 82, 3045-3067, 2010.
- [2] Qi X. L., Zhange S.C., Topological insulator and superconductors, *Reviews of Modern Physics*, 83, 1057-1110, 2011.
- [3] Ando Y., Topological Insulator Materials, *Journal of the Physical Society of Japan*, 82, 102001-32, 2013.
- [4] Wang H.Y., Chen X.W., Zhou X.Y., Zhang L.B., and Zhou G.H., Electronic structure and transport on the surface of topological insulator attached to an electromagnetic superlattice, *Phys. B*, 407, 3664-3670, 2012.
- [5] Zhang Y., Zhai F., Tunneling magnetoresistance on the surface of a topological insulator with periodic magnetic modulations, *Applied Physics Letters*, 96, 172109-3, 2010.
- [6] Song J.T., Li Y.X., and Sun Q.F., Transport through quantum wells and superlattice on topological insulator surfaces, *Journal of Physics: Condensed Matte*, 26, 185007, 2014.
- [7] Vali M., Dideban D., and Moezi N., Quantum well resonant tunneling FET based on topological insulator, *Super. Micro*, 100, 1256-1262, 2016.
- [8] Zhang K. H., Wang Z. C., Zheng Q. R., and Su G., Gate-Voltage controlled electronic transport through a ferromagnet/normal/ferromagnet junction on the surface of a topological insulator, *Physical Review B*, 86, 174416-7, 2012.
- [9] Chen Y. L., Analytis J. G., Chu J.-H., Liu Z. K., Mo S.-K., Qi X. L., Zhang H. J., Lu D. H., Dai X., Fang Z., Zhang S. C., Fisher I. R., Hussain Z., and Shen Z. X., Experimental Realization of a Tree-Dimensional Topological Insulator  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ , *Science*, 325, 178-259, 2009.
- [10] Fu L., Hexagonal Warping Effects in Surface States of the Topological Insulator, *Physical Review Letters*, 103, 266801-4, 2009.
- [11] Nomura M., Souma S., Takayama A., Sato T., Takahashi T., Eto K., Segawa K., and Ando Y., Relationship between Fermi surface waping and out-of-plane spin polarization in topological insulators: A view from spin-and angle-resolved photoemission, *Physical Review B*, 89, 045134, 2014.
- [12] Wang C. M., Yu F. J., Effects of hexagonal warping on surface transport in topological insulators, *Physical Review B*, 84, 155440, 2011.
- [13] Li Z., Carbotte J. P., Hexagonal warping on optical conductivity of surface states in Topological insulator  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ , *Physical Review B*, 87, 155416, 2013.
- [14] An J., Ting C. S., Surface state scattering from a step defect in the topological insulator  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ , *Physical Review B*, 86, 165313, 2012.
- [15] Li H., Shao J. M., Zhang H. B., Yao D. X., and Yang G. W., Resonant tunneling in a topological insulator supperlattice, *Journal of Applied Physics*, 114, 093703-6, 2013.
- [16] Akzyanov R. S., Rakhmanov A. L., Surface charge conductivity of a topological insulator in a magnetic field: The effect of hexagonal warping, *Physical Review B*, 97, 075421, 2018.
- [17] Fu Z. G., Zhang P., Chen M., Wang Z., Zheng F. W., and Lin H. Q., Anisotropic Fabry-Perot resonant states confined within nano-steps on the topological insulator surface, *Scientific Reports*, 4, 5544, 2014.
- [18] Siu Z. B., Jalil M. B. A., and Tan S. G., Topological state transport in topological insulators under the influence of hexagonal warping and exchange coupling to in-plane magnetizations, *Scientific Reports*, 4, 5062-7, 2014.
- [19] Yu, Z. M., Ma, D. S., Pan, H., Yao, Y., Double reflection and tunneling resonance in a topological insulator: Towards the quantification of warping strength by transport, *Physical Review B*, 96, 125152, 2017.



- [20] Arabikhah M., Saffarzadeh A., Surface state transport in double-gated and magnetized topological insulators with hexagonal warping effects, *Journal of Physics: Condensed Matter*, 31, 445001-8, 2019.
- [21] Dehnavi H., Masoudi A.A., Saadat M., Ghadiri H., and Saffarzadeh A., Electron scattering in a superlattice of line defects on the surface of topological insulator, *Journal of Physics: Condensed Matter*, 32, 415002-10, 2020.
- [22] Saffarzadeh A., Bahar M., and Banihasan M., Spin-dependent resonant tunneling in ZnSe/ZnMnSe heterostructure, *Phys. E*, 27, 462, 2005.
- [23] Katsnelson M. I., Novoselov K. S., and Geim A. K., Chiral tunneling and the Klein paradox in graphene, *Nature Physics*, 2, 620-625, 2006.
- [24] Klein O., The reflection of electrons at a potential jump according to Dirac's relativistic dynamics, *Phys. Z*, 53, 157, 1929.
- [25] Li Y., Wan Q., Peng Y., Wang G., Qian Z., Zhou G., and Jalil M. B. A., The effect of magnetic field on chiral transmission in p-n-p graphene junctions, *Scientific Reports*, 5, 18458-10, 2015.
- [26] Stephen G.M., Vail O.A., Lu J., Beck W.A., Taylor P.J., and Friedman A.L., Weak Antilocalization and Anisotropic Magnetoresistance as a Probe of Surface States in Topological  $\text{Bi}_2\text{Te}_x\text{Se}_{3-x}$  Thin Films, *Scientific Reports*, 10, 4845-7, 2020.



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

