Research Paper

Study of Geometric Measure of Entanglement Produced by One-axis Counter Twisting Hamiltonian in Spin Systems[1]

Azita Naji*[2], Mahmood Zeheiry[3]and Mehrzad Ashrafpour[4]

Received:2020.11.23
Revised: 2021.01.23
Accepted:2021.04.04

Abstract

Generation of entanglement in separable two qubits states using the one-axis counter twisting Hamiltonian in the presence/absence of a magnetic field is studied by introducing the geometric measure of entanglement. The exact expression for the geometric measure is obtained without calculating the time evolution of the system state using the method of the expectation values of spin. The graphs of this measure as a function of time are plotted. The results show that in order to obtain the maximum entanglement under the influence of one-axis counter twisting Hamiltonian around x axis in absence of magnetic field, the system initially must be in a tensor product of S_z or S_y eigenstates. Also, the system initially in the S_x eigenstates under the influence of one-axis counter twisting Hamiltonian around x axis in absence of a magnetic field is not entangled, but, under the influence of one-axis counter twisting Hamiltonian around x axis in presence of a magnetic field in z direction the entanglement for this state becomes maximum. For all states, the frequency of entanglement is an increasing function of the magnetic field.

Keywords: *Entanglement, Geometric Measure, One-axis Counter Twisting Hamiltonian, Mean Value of Spin*.

---

1 - DOI: **10.22051/ijap.2021.34065.1179**
2 - Assistant Professor, Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. (Corresponding Author). Email: az.naji56@gmail.com
3 - M. Sc. in Physics, Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. Email: zeheiry.m@gmail.com
4 - Assistant Professor, Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. Email: mehrzadashrafpour@yahoo.com

فصلنامهٔ علمی فیزیک کاربردی ایران، دانشگاه الزهرا
سال دهم، پیاپی ۲۳، زمستان ۱۳۹۹

مقالهٔ پژوهشی

بررسی سنجهٔ هندسی درهم‌تنیدگی تولیدشده توسط هامیلتونی پیچش تک‌محوری در سامانه‌های اسپینی [۱]

آزیتا ناجی [*۲]، محمود زهیری [۳] و مهرزاد اشرف‌پور [۴]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۰۳
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۱/۰۴
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۱/۱۵

چکیده

با توجه به کاربردهای فراوان حالت‌های درهم‌تنیده و ضرورت تعیین کمّی میزان درهم‌تنیدگی، در این مقاله نحوهٔ ایجاد درهم‌تنیدگی در حالت‌های دوکیوبیتی جدایی‌پذیر با اعمال هامیلتونی پیچش تک‌محوری، در غیاب یا حضور میدان مغناطیسی با معرفی سنجهٔ هندسی مطالعه شده است. عبارت دقیقی برای سنجهٔ هندسی درهم‌تنیدگی بدون محاسبهٔ حالت سامانه در حال تحول، با استفاده از روش مقدار چشمداشتی اسپین، محاسبه شده است سپس با رسم نمودار آن سنجه نسبت به زمان عوامل مؤثر در بیشینه‌سازی درهم‌تنیدگی را مطالعه کرده‌ایم. نتایج نشان داد که برای به‌دست آوردن بیشینهٔ درهم‌تنیدگی توسط

---

[1] DOI: **10.22051/ijap.2021.34065.1179**

[۲] استادیار، گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. (نویسندهٔ مسئول)
Email: az.naji56@gmail.com
[۳] دانش آموختهٔ کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران.
Email: zeheiry.m@gmail.com
[۴] استادیار، گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران.
Email: mehrzadashrafpour@yahoo.com

هامیلتونی پیچش تک‌محوری حول محور x در غیاب میدان مغناطیسی، باید حالت اولیه، ضرب تانسوری ویژه‌حالت‌های مؤلفه‌های z یا y بردار اسپین کل باشد. ویژه‌حالت مؤلفهٔ x اسپین کل، تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک‌محوری حول محور z در غیاب میدان مغناطیسی، درهم‌تنیده نیست اما تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک‌محوری حول محور x با حضور میدان مغناطیسی در راستای z به بیشینهٔ درهم‌تنیدگی می‌رسد. هم‌چنین برای همهٔ حالت‌ها، بسامد درهم‌تنیدگی تابعی افزایشی از میدان مغناطیسی است.
واژگان کلیدی: *درهم‌تنیدگی، سنجهٔ هندسی، هامیلتونی پیچش تک‌محوری، مقادیر چشمداشتی اسپین.*

۱. مقدمه

درهم‌تنیدگی یکی از مفیدترین منابع در پردازش اطلاعات کوانتومی است [۱] و کاربردهای زیادی در نظریهٔ اطلاعات کوانتومی و نظریهٔ میدان‌های کوانتومی دارد [۲، ۳]. به‌همین دلیل، شناخت حالت‌های درهم‌تنیده و تعیین میزان درهم‌تنیدگی آن‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است. برای تعیین مقدار درهم‌تنیدگی یا جدایی‌پذیر بودن حالت‌ها، معیارها و سنجه‌های متعددی تاکنون معرفی شده است [۴، ۵] که هریک نقاط ضعف و قوت مخصوص به خود دارند.

یکی از سنجه‌های معرفی شده، جهت سنجش مقدار درهم‌تنیدگی، سنجهٔ هندسی است [۶]. با استفاده از این سنجه، به روش مقادیر چشمداشتی اسپین [۷]، درهم‌تنیدگی ایجادشده در حالت‌های جدایی‌پذیر تحت هامیلتونی پیچش تک‌محوری را در حضور و غیاب میدان مغناطیسی بررسی می‌کنیم. برای به‌دست آوردن مقدار سنجهٔ هندسی، مقادیر چشمداشتی مشاهده‌پذیرها و تابع مقدار درهم‌تنیدگی را به صورت تحلیلی محاسبه می‌کنیم. سپس با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا نمودار مقدار درهم تنیدگی را برای حالت‌های مختلف ترسیم کرده و نتایج حاصل از آن را بررسی می‌کنیم.

۲. سنجهٔ هندسی و مقادیر چشمداشتی اسپین

سنجهٔ هندسی اولین بار توسط شیمونی در سال ۱۹۹۵ معرفی شد [۶]. برای هر حالت خالص $|\psi\rangle$، سنجهٔ هندسی بر اساس فاصلهٔ هندسی بین حالت خالص $|\psi\rangle$ و نزدیک‌ترین حالت خالص جدایی‌پذیر تعریف می‌شود [۶، ۸، ۹]،

$$E = 1 - \max\left|\langle \psi | \psi_s \rangle\right|^2 = 1 - \Lambda_{\max}^2 \qquad (۱)$$

که در آن، $|\psi_s\rangle$ یک حالت خالص جدایی‌پذیر است.

همان‌طور که در رابطۀ (۱) دیده می‌شود، برای محاسبۀ مقدار سنجه، لازم است کمینه‌سازی شود و از آن‌جا که، کمینه‌سازی در این موارد کار دشواری است، محققان در جستجوی روشی آسان‌تر و عملیاتی‌تر جهت محاسبۀ مقدار درهم‌تنیدگی حالت‌ها، به ارتباط بین سنجۀ هندسی و مقادیر چشمداشتی اسپین به شکل زیر دست یافتند [۷]،

$$E = \frac{1}{2}(1 - |\langle\sigma\rangle|) \tag{۲}$$

در این روش علاوه بر این‌که از عملیات سخت کمینه‌سازی رهایی می‌یابیم، مقدار درهم‌تنیدگی را نیز آزمایش‌پذیر کرده‌ایم زیرا مقادیر چشمداشتی اسپین را می‌توانیم در آزمایشگاه به‌دست آوریم.

درخور توجه است که برای حالت‌های کاملاً جدایی‌پذیر مانند $|\psi\rangle = |00\rangle$ مقدار $\langle\sigma_1\rangle = 1$ به‌دست می‌آید و در نتیجه مقدار سنجه برابر صفر می‌شود و برای حالت‌های کاملاً درهم‌تنیدۀ بل مانند $|\psi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/2$ مقدار چشمداشتی اسپین اول (یا اسپین دوم) برابر با صفر و مقدار سنجه برابر $1/2$ می‌شود. بنابراین مقدار سنجۀ هندسی برای حالت‌های دوکیوبیتی، مقادیر بین 0 تا $1/2$ را خواهد داشت.

۳. تأثیر هامیلتونی پیچش تک‌محوری

سامانه‌ای شامل N اسپین $\frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم؛ کمیت S_x برای کل سامانه برابر با مجموع تمام S_{ix}ها است [۱۰، ۱۱]:

$$S_x = \sum_{i=1}^{N} S_{ix} = \frac{\hbar}{2}\sum_{i=1}^{N} \sigma_{ix} \tag{۳}$$

که در آن σ_{ix} مؤلفۀ x ماتریس‌های پائولی iامین اسپین است.

هامیلتونی پیچش تک‌محوری حول محور x به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰، ۱۱]:

$$H = \chi S_x^2 \tag{۴}$$

که در آن S_x^2 طبق رابطۀ (۳) به‌دست می‌آید. این هامیلتونی موجب پیچش سامانه حول محور x می‌شود، که نتیجۀ آن ایجاد درهم‌تنیدگی در برخی سامانه‌های جدایی‌پذیر است.

حالت اولیۀ سامانه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|\psi_{t=0}\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle \dots |\psi_N\rangle \tag{۵}$$

که در آن

$$|\psi_j\rangle = a_j|0\rangle + b_j|1\rangle \tag{۶}$$

که این حالت جدایی‌پذیر است یعنی درهم‌تنیده نیست. عملگر تحول زمانی که $|\psi_{t=0}\rangle$ را به $|\psi_t\rangle$ تبدیل می‌کند، با استفاده از رابطهٔ (۴)، به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$U = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = e^{-\frac{i\chi S_x^2 t}{\hbar}} \tag{۷}$$

با توجه به رابطهٔ (۳)، مقدار S_x^2 برحسب عملگرهای پائولی برابر است با

$$S_x^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(\sigma_{1x} + \sigma_{2x} + \ldots + \sigma_{Nx}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(NI + \sum_{l\neq k}^{N} \sigma_{lx}\sigma_{kx}\right) \tag{۸}$$

با جایگذاری رابطهٔ فوق در رابطهٔ (۷) داریم:

$$U = e^{-i\gamma tNI} e^{-i\gamma t \sum\limits_{l\neq k}^{N} \sigma_{lx}\sigma_{kx}} \tag{۹}$$

که در آن، عبارت $\frac{\chi\hbar}{4}$ را برابر γ در نظر گرفته‌ایم.

برای محاسبهٔ درهم‌تنیدگی ایجادشده بین اسپین اول و بقیهٔ سامانه، ابتدا مقدار چشمداشتی σ_1 را برای حالت تحول‌یافته به‌دست می‌آوریم،

$$\left|\psi_t\right\rangle = e^{-\frac{i\chi S_x^2 t}{\hbar}}\left|\psi_{t=0}\right\rangle \tag{۱۰}$$

$$\left\langle \sigma_1 \right\rangle_t = \left\langle \psi_{(t)} \right| \sigma_1 \left| \psi_{(t)} \right\rangle \tag{۱۱}$$

$$\left\langle \sigma_{1x} \right\rangle_t = \left\langle \psi_1 \right| \left\langle \psi_2 \right| \ldots \left\langle \psi_N \right| \left(e^{i\gamma NIt} e^{2i\gamma t\sigma_{1x}\left(\sum\limits_{k\neq 1}^{N} \sigma_{kx}\right)} \sigma_{1x} e^{-i\gamma NIt} e^{-2i\gamma t\sigma_{1x}\left(\sum\limits_{k\neq 1}^{N} \sigma_{kx}\right)} \right) \left| \psi_1 \right\rangle \left| \psi_2 \right\rangle \ldots \left| \psi_N \right\rangle = \left\langle \sigma_{1x} \right\rangle_0 \tag{۱۲}$$

$$\left\langle \sigma_{1y} \right\rangle_t = \left\langle \psi_1 \right| \left\langle \psi_2 \right| \ldots \left\langle \psi_N \right| \left(e^{i\gamma NIt} e^{2i\gamma t\sigma_{1x}\left(\sum\limits_{k\neq 1}^{N} \sigma_{kx}\right)} \sigma_{1y} e^{-i\gamma NIt} e^{2i\gamma t\sigma_{1x}\left(\sum\limits_{k\neq 1}^{N} \sigma_{kx}\right)} \right) \left| \psi_1 \right\rangle \left| \psi_2 \right\rangle \ldots \left| \psi_N \right\rangle \tag{۱۳}$$

با توجه به آن‌که عبارت $e^{-i\gamma NIt}$ با σ_{1y} جابه‌جایی‌پذیر است، عبارت

$$B = e^{i\gamma NIt} e^{2i\gamma t\sigma_{1x}\left(\sum\limits_{k\neq 1}^{N} \sigma_{kx}\right)} \sigma_{1y} e^{-i\gamma NIt} e^{-2i\gamma t\sigma_{1x}\left(\sum\limits_{k\neq 1}^{N} \sigma_{kx}\right)} \tag{۱۴}$$

به‌صورت زیر خواهد شد:

$$B = e^{2i\gamma t\sigma_{1z}\left(\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right)}\sigma_{1y}e^{-2i\gamma t\sigma_{1z}\left(\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right)} \tag{۱۵}$$

که با کمک لِم بیکرـهاسدورف و با توجه به این‌که توان‌های زوج ماتریس‌های پائولی برابر I و توان‌های فرد آن‌ها برابر خودشان می‌شود، به شکلی ساده‌تر می‌نویسیم

$$\begin{aligned}B &= \sigma_{1y} + 2i\gamma t\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\left[\sigma_{1z},\sigma_{1y}\right] + \frac{\left(2i\gamma t\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right)^2}{2}\left[\sigma_{1z},\left[\sigma_{1z},\sigma_{1y}\right]\right]\\ &+\frac{\left(2i\gamma t\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right)^3}{6}\left[\sigma_{1z},\left[\sigma_{1z},\left[\sigma_{1z},\sigma_{1y}\right]\right]\right]+\ldots\end{aligned} \tag{۱۶}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow B = \sigma_{1y} - 4\gamma t\sigma_{1x}\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz} - 8\gamma^2t^2\left(\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right)^2\sigma_{1y} + \frac{64\gamma^3t^3\left(\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right)^3}{6}\sigma_{1x}+\ldots\\ &=\left(1-8\gamma^2t^2\left(\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right)^2+\ldots\right)\sigma_{1y}-\left(4\gamma t\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}-\frac{64\gamma^3t^3\left(\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right)^3}{6}+\ldots\right)\sigma_{1x}\end{aligned} \tag{۱۷}$$

$$\Rightarrow B = \sigma_{1y}\cos\left(4\gamma t\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right) - \sigma_{1x}\sin\left(4\gamma t\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right) \tag{۱۸}$$

عبارت‌های $\left(\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right)^2$ و $\left(\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right)^3$ و توان‌های بالاتر را برای یک سیستم دوکیوبیتی محاسبه می‌کنیم تا از رابطهٔ (۱۸) مقدار B را به‌دست آوریم،

$$\left(\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right)^2 = \sigma_{2z}^2 = I \tag{۱۹}$$

$$\left(\sum_{k\neq1}^{N}\sigma_{kz}\right)^3 = \sigma_{2z}^3 = \sigma_{2z} \tag{۲۰}$$

به‌همین ترتیب توان‌های زوج و فرد با I و σ_{2x} برابر می‌شود. بنابراین،

$$B = \sigma_{1y} - 4\gamma t\sigma_{1z}\sigma_{2x} - 8\gamma^2 t^2\sigma_{1y} + \frac{64\gamma^3 t^3}{6}\sigma_{1z}\sigma_{2x} + \ldots = \left(1 - 8\gamma^2 t^2 + \ldots\right)\sigma_{1y} - \left(4\gamma t - \frac{64\gamma^3 t^3}{6} + \ldots\right)\sigma_{1z}\sigma_{2x}$$
$$\Rightarrow B = \sigma_{1y}\cos\left(4\gamma t\right) - \sigma_{1z}\sigma_{2x}\sin\left(4\gamma t\right) \quad (۲۱)$$

سپس با توجه به روابط (۱۳) و (۱۴) داریم:

$$\begin{aligned}\left\langle \sigma_{1y} \right\rangle_t &= \left\langle \psi_1 \right|\left\langle \psi_2 \right|\left(\sigma_{1y}\cos\left(4\gamma t\right) - \sigma_{1z}\sigma_{2x}\sin\left(4\gamma t\right)\right)\left|\psi_1\right\rangle\left|\psi_2\right\rangle \\ &= \left\langle \sigma_{1y} \right\rangle_0 \cos\left(4\gamma t\right) - \left\langle \sigma_{1z} \right\rangle_0 \left\langle \sigma_{2x} \right\rangle_0 \sin\left(4\gamma t\right)\end{aligned} \quad (۲۲)$$

هم‌چنین برای محاسبهٔ $\left\langle \sigma_{1z} \right\rangle_t$ داریم:

$$\left\langle \sigma_{1z} \right\rangle_t = \left\langle \psi_1 \right|\left\langle \psi_2 \right|\left(e^{2i\gamma It}e^{2i\gamma t\sigma_{1x}\sigma_{2x}}\sigma_{1z}e^{-2i\gamma It}e^{-2i\gamma t\sigma_{1x}\sigma_{2x}}\right)\left|\psi_1\right\rangle\left|\psi_2\right\rangle \quad (۲۳)$$

برای محاسبهٔ رابطهٔ (۲۳)، با انتخاب عبارت

$$C = e^{2i\gamma t\sigma_{1x}\sigma_{2x}}\sigma_{1z}e^{-2i\gamma t\sigma_{1x}\sigma_{2x}} \quad (۲۴)$$

و استفاده از لِم بیکر‌ـ‌هاسدورف داریم:

$$\begin{aligned}C &= \sigma_{1z} + 2i\gamma t\sigma_{2x}\left[\sigma_{1x},\sigma_{1z}\right] + \frac{\left(2i\gamma t\sigma_{2x}\right)^2}{2}\left[\sigma_{1x},\left[\sigma_{1x},\sigma_{1z}\right]\right] \\ &\quad + \frac{\left(2i\gamma t\sigma_{2x}\right)^3}{6}\left[\sigma_{1x},\left[\sigma_{1x},\left[\sigma_{1x},\sigma_{1z}\right]\right]\right] + \ldots\end{aligned} \quad (۲۵)$$
$$C = \sigma_{1z} + 4\gamma t\sigma_{1y}\sigma_{2x} - 8\gamma^2 t^2\sigma_{1z} - \frac{64\gamma^3 t^3}{6}\sigma_{1y}\sigma_{2x} + \ldots = \left(1 - 8\gamma^2 t^2 + \ldots\right)\sigma_{1z} + \left(4\gamma t - \frac{64\gamma^3 t^3}{6} + \ldots\right)\sigma_{1y}\sigma_{2x}$$

$$\Rightarrow C = \sigma_{1z}\cos\left(4\gamma t\right) + \sigma_{1y}\sigma_{2x}\sin\left(4\gamma t\right) \quad (۲۶)$$

با جایگذاری (۲۶) در رابطهٔ (۲۳) داریم:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{1z} \rangle_t &= \langle \psi_1 | \langle \psi_2 | \left(\sigma_{1z} \cos(4\gamma t) + \sigma_{1y}\sigma_{2x} \sin(4\gamma t) \right) | \psi_1 \rangle | \psi_2 \rangle \\ &= \langle \sigma_{1z} \rangle_0 \cos(4\gamma t) + \langle \sigma_{1y} \rangle_0 \langle \sigma_{2x} \rangle_0 \sin(4\gamma t)\end{aligned} \tag{۲۷}$$

با استفاده از روابط (۱۲)، (۲۲) و (۲۷) خواهیم داشت:

$$\langle \sigma_1 \rangle_t^2 = \langle \sigma_{1x} \rangle_0^2 + \left(\cos^2(4\gamma t) + \langle \sigma_{2x} \rangle_0^2 \sin^2(4\gamma t) \right) \left(\langle \sigma_{1y} \rangle_0^2 + \langle \sigma_{1z} \rangle_0^2 \right) \tag{۲۸}$$

سپس با جایگذاری رابطۀ بالا در رابطۀ (۲)، مقدار درهم‌تنیدگی به شکل زیر به‌دست می‌آید،

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\langle \sigma_{1x} \rangle_0^2 + \left(\cos^2(4\gamma t) + \langle \sigma_{2x} \rangle_0^2 \sin^2(4\gamma t) \right) \left(\langle \sigma_{1y} \rangle_0^2 + \langle \sigma_{1z} \rangle_0^2 \right)} \right) \tag{۲۹}$$

با فرض $|\psi_1\rangle = a_1|0\rangle + b_1|1\rangle$ و $|\psi_2\rangle = a_2|0\rangle + b_2|1\rangle$ و حقیقی بودن ضرایب a_1، a_2، b_1 و b_2، رابطۀ (۲۹) برابر می‌شود با

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{4a_1^2 b_1^2 + \left(\cos^2(4\gamma t) + 4a_2^2 b_2^2 \sin^2(4\gamma t) \right)\left(1 - 4a_1^2 b_1^2 \right)} \right) \tag{۳۰}$$

در شکل (۱) منحنی $E(t)$ در رابطۀ (۳۰) را برای چند حالت اولیه که در روابط (۳۱) تا (۳۵) معرفی شده‌اند، رسم کرده‌ایم.

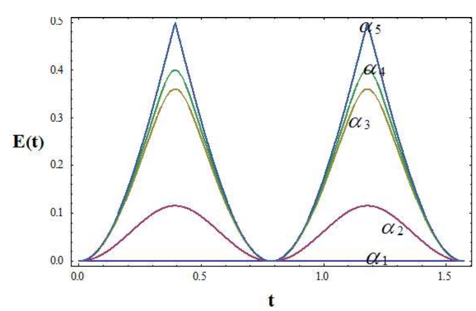
$$\alpha_1: a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \gamma = 1 \tag{۳۱}$$

$$\alpha_2: a_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}, b_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}, a_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}, b_2 = \frac{3}{\sqrt{10}}, \gamma = 1 \tag{۳۲}$$

$$\alpha_3: a_1 = \frac{1}{10}, b_1 = \frac{\sqrt{99}}{10}, a_2 = \frac{1}{10}, b_2 = \frac{\sqrt{99}}{10}, \gamma = 1 \tag{۳۳}$$

$$\alpha_4: a_1 = 1, b_1 = 0, a_2 = \frac{1}{10}, b_2 = \frac{\sqrt{99}}{10}, \gamma = 1 \tag{۳۴}$$

$$\alpha_5: a_1 = 1, b_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = 1, \gamma = 1 \tag{۳۵}$$



شکل ۱ نمودار تغییرات $E(t)$ برای ۵ حالت معرفی‌شده در روابط (۳۱) تا (۳۵).

نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱. حالتی که در آن $a_1^2 = b_1^2$ یا $a_2^2 = b_2^2$ باشد، به سبب این‌که از ضرب ویژه‌حالت‌های عملگر S_x ساخته شده است، تحت تأثیر هامیلتونی مورد بررسی درهم‌تنیده نخواهد شد.

۲. برای حالت‌های اولیه‌ای که با استفاده از ضرب ویژه‌حالت‌های عملگر S_z ساخته شده‌اند، رابطهٔ (۳۰)، به‌صورت $E(t) = \frac{1}{2}[1 - \cos(4\gamma t)]$ خواهد شد. یعنی که این حالت‌ها، تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک‌محوری، پس از زمان $t = \frac{\pi}{8\gamma}$، به حالت‌های کاملاً درهم‌تنیدهٔ بل تبدیل خواهند شد.

اگر ضرایب a_1، a_2، b_1 و b_2 را مختلط درنظر بگیریم، نتیجهٔ ۲ برای حالت‌های اولیهٔ ضربیِ ساخته‌شده از عملگر S_y نیز صادق است.

باید ذکر کنیم که در مراجع [۱۲، ۱۳] نیز درهم‌تنیدگی ایجادشده توسط هامیلتونی پیچش دومحوری در سامانه‌های اسپینی به صورت عددی بررسی شده است و نتایج مشابه به‌دست آمده است.

۴. تأثیر هامیلتونی پیچش تک‌محوری درحضور میدان مغناطیسی

میدان مغناطیسی را در راستای z درنظر می‌گیریم. هامیلتونی پیچش تک‌محوری در حضور میدان مغناطیسی، به‌شکل زیر نوشته می‌شود [۱۱]،

$$H' = \chi S_x^2 + BS_z \tag{۳۶}$$

بنابراین عملگر تحول زمانی، به‌صورت زیر است

$$U = e^{-2i\gamma t\sigma_{1x}\sigma_{2x}} e^{-i\eta t(\sigma_{1z} + \sigma_{2z})} \tag{۳۷}$$

که در آن $\eta = \frac{B}{2}$ و $\gamma = \frac{\hbar\chi}{4}$ است.

مقادیر چشمداشتی مؤلفه‌های اسپین را نسبت به حالت تحول‌یافته با کمک رابطهٔ (۳۷) با روشی مشابه قسمت قبل محاسبه می‌کنیم،

$$\langle \sigma_{1x} \rangle_t = \langle \sigma_{1x} \rangle_0 \cos(2\eta t) - \langle \sigma_{1y} \rangle_0 \sin(2\eta t) \tag{۳۸}$$

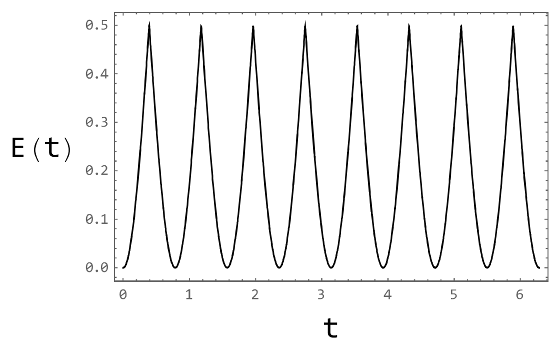
$$\langle \sigma_{1y} \rangle_t = \left(\langle \sigma_{1y} \rangle_0 \cos(4\gamma t) - \langle \sigma_{2x} \rangle_0 \langle \sigma_{1z} \rangle_0 \sin(4\gamma t) \right) \times \cos(2\eta t) + \langle \sigma_{1x} \rangle_0 \sin(2\eta t) \quad (۳۹)$$

$$\langle \sigma_{1z} \rangle_t = \langle \sigma_{1z} \rangle_0 \cos(4\gamma t) + \langle \sigma_{1y} \rangle_0 \langle \sigma_{2x} \rangle_0 \sin(4\gamma t) \quad (۴۰)$$

با استفاده از روابط (۳۸) و (۳۹) و (۴۰) مقدار چشمداشتی کیوبیت اول به‌دست می‌آید

$$\langle \sigma_1 \rangle_t^2 = \left(\langle \sigma_{1x} \rangle_0 \cos(2\eta t) - \langle \sigma_{1y} \rangle_0 \sin(2\eta t) \right)^2 + \left(\langle \sigma_{1z} \rangle_0 \cos(4\gamma t) + \langle \sigma_{1y} \rangle_0 \langle \sigma_{2x} \rangle_0 \sin(4\gamma t) \right)^2 + \left\{ \left(\langle \sigma_{1y} \rangle_0 \cos(4\gamma t) - \langle \sigma_{2x} \rangle_0 \langle \sigma_{1z} \rangle_0 \sin(4\gamma t) \right) \cos(2\eta t) + \langle \sigma_{1x} \rangle_0 \sin(2\eta t) \right\}^2 \quad (۴۱)$$

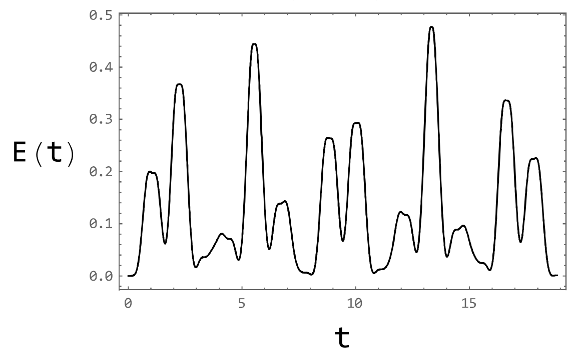
با جایگذاری رابطهٔ بالا در رابطهٔ (۲)، $E(t)$ را محاسبه مـی‌کنیم. در شـکل (۲) منحنـی $E(t)$ را برای حالت اولیهٔ α_5 با فرض $\eta = 1$ رسم کرده‌ایم.



شکل ۲ نمودار تغییرات $E(t)$ با فرض $\eta = 1$ برای حالت α_5.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نمودار شکل (۲) هیچ تفاوتی با نمودار α_5 شـکل (۱) نـدارد، زیـرا حالت α_5 از ضرب ویژه‌حالت‌های عملگر S_z ساخته شده‌است. بنابراین اعمال میدان مغناطیسی در راستای z تأثیری در ایجاد درهم‌تنیدگی نـدارد. بـه‌عـلاوه، مـی‌بینـیم کـه مقـدار درهـم‌تنیـدگی بـا گذشت زمان رفتار نوسانی دارد و سامانه همیشه درهم‌تنیده است، مگر در بعضی نقاط گسسته کـه در آن‌ها مقدار درهم‌تنیدگی صفر می‌شود.

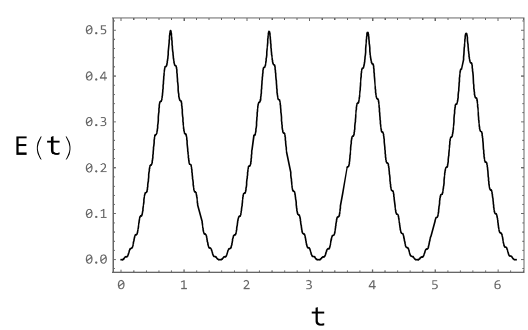
در شکل (۳) منحنی $E(t)$ را برای حالت اولیهٔ α_1؛ که از ضرب ویژه‌حالت‌های عملگر S_x ساخته شده‌است، با فرض $\eta = 1$ رسم کرده‌ایم.



شکل ۳ نمودار تغییرات $E(t)$ با فرض $\eta = 1$ برای حالت α_1.

شکل (۳) نشان می‌دهد که حضور میدان مغناطیسی باعث ایجاد درهم‌تنیدگی در این حالت شده است درحالی‌که مطابق شکل (۱) هامیلتونی پیچش تک‌محوری در غیاب میدان مغناطیسی، هیچ درهم‌تنیدگی در این حالت ایجاد نمی‌کند. هم‌چنین نمودار نشان می‌دهد که سامانه در حضور مقادیر کوچک میدان مغناطیسی، همیشه درهم‌تنیده است.

شکل (۴) نشان می‌دهد که با افزایش شدت میدان مغناطیسی، منحنی درهم‌تنیدگی نوسانی خواهد شد، طوری‌که در بازه‌های زمانی یکسان، درهم‌تنیدگی بیشینه می‌شود. نمودارها نشان می‌دهد که افزایش میدان مغناطیسی باعث افزایش بسامد ایجاد درهم‌تنیدگی می‌شود اما بیشینهٔ درهم‌تنیدگی را کاهش می‌دهد.



شکل ۴ نمودار تغییرات $E(t)$ با فرض $\eta = 20$ برای حالت α_1.

از آن‌جا که اعمال میدان مغناطیسی در راستای z سبب چرخش حالت، حول محور z می‌شود، مقدار چشمداشتی اسپین را بین راستاهای x و y با فرکانسی برابر با 2η تغییر می‌دهد، بنابراین

حالت اولیه‌ای که از ضرب ویژه‌حالت‌های عملگرهای S_x یا S_y ساخته شده است، توسط هامیلتونی پیچش تک‌محوری در حضور میدان مغناطیسی درهم‌تنیده می‌شود.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله سنجهٔ هندسی درهم‌تنیدگی را در سامانه‌های کیوبیتی با استفاده از مقادیر چشمداشتی اسپین مطالعه کردیم. با استفاده از این روش، دینامیک درهم‌تنیدگی حالت‌های جدایی‌پذیر را تحت تأثیر هامیلتونی پیچش تک‌محوری در غیاب و حضور میدان مغناطیسی خارجی در راستای z بررسی کردیم. بدین ترتیب، توانستیم عبارت دقیقی برای سنجهٔ هندسی بدون محاسبهٔ حالت سامانه در حال تحول، با محاسبهٔ مقادیر چشمداشتی اسپین به‌دست آوریم.

بررسی نمودارهای $E(t)$ نشان می‌دهد که تابع درهم‌تنیدگی یک تابع تناوبی است که بین صفر و یک مقدار بیشینه که به حالت اولیه بستگی دارد نوسان می‌کند. هامیلتونی پیچش تک‌محوری، بیشترین درهم‌تنیدگی را در حالت‌های اولیه‌ای که از ضرب تانسوری ویژه‌حالت‌های S_z یا S_y ساخته می‌شود، به‌وجود می‌آورد. کمترین درهم‌تنیدگی مربوط به حالت‌های اولیه‌ای است که حداقل یکی از کیوبیت‌های آن‌ها، ویژه‌حالت S_x باشد.

اثر هامیلتونی در حضور میدان مغناطیسی نیز با استفاده از سنجهٔ هندسی محاسبه شد. مشاهده کردیم که حالت‌هایی که از ضرب ویژه‌حالت‌های S_x ساخته شده است، در حضور میدان مغناطیسی خارجی در راستای z، درهم‌تنیده می‌شود. هم‌چنین در همهٔ حالت‌ها، افزایش میدان مغناطیسی خارجی باعث افزایش بسامد تابع $E(t)$ می‌شود.

۶. تقدیر و تشکر

این تحقیق توسط دانشگاه شهید چمران اهواز، ایران [GN: SCU.SP98.12469] پشتیبانی شد.

منابع

[1] Sarkar D., “On measures of quantum entanglement”, Int. J. Quantum Inf, **14** Issue 06, 1640024 (2016).

[2] Naji A., Hamzeofi R. and Afshar D., “Entanglement teleportation via two qubits Heisenberg interaction in Jaynes-Cummings model under intrinsic decoherence”, Iranian J. Phys. Res. 19, 03, 59-62 (2019).

[3] Liu X. S., Long G. L., Tong D. M. and Li F., “General scheme for super dense coding between multi-parties”, Phys. Rev. A 65, 022304-07 (2002).

[4] Peres A., “Separability criterion for density matrices”, Phys. Rev. Lett. 77, 1413-1415 (1996).

[5] Hollands S. and Sanders K., “Entanglement measure and their properties in quantum field theory”, arXiv:1702.04924 quant-ph (2017).

[6] Shimony A., “Degree of entanglement”, Ann. N. Y. Acad. Sci. **755**, 675-679 (1995).

[7] Frydryszak A. M. and Tkachuk V. M., “Geometric measure of entanglement for pure states and mean value of spin”, arXiv:1211.6472 quant-ph.

[8] Wei T. C. and Goldbart P. M., “Geometric measure of entanglement and applications to bipartite and multipartite quantum states”, Phys. Rev. A **68**, 042307-20 (2003).

[9] Tamaryan L., Park D. K. and Tamaryan S., “Analytic expressions for geometric measure of three qubit states”, Phys. Rev. A **77**, 022325-30 (2008).

[10] Kitagawa M. and Ueda M., “Squeezed spin states”, Phys. Rev. A. **47**(6), 5138-5143 (1993).

[11] Wang X. and Sanders B. C., “Spin squeezing and pairwise entanglement for symmetric multiqubit states”, Phys. Rev. A. **68**, 012101-6 (2003).

[12] Jafarpour M. and Akhound A., “Entanglement and squeezing of multi-qubit systems using a two-axis countertwisting Hamiltonian with an external field”, Phys. Lett. A **372**, 2374-2379 (2008).

[13] Naji A. and Jafarpour M., “Squeezing and entanglement in multi-qutrit systems”, Quant. Info. Process. **12**, 2917-2933 (2013).