Research Paper

Positive N-complexiton of (2+1)-Dimensional B-type Kadomtsev-Petviashvili Equation

Mohammad Ali Mirzazadeh[1], Mostafa Eslami[*2],
Kamyar Hossieni[3], Majid Samavat[4]

Received: 2019.09.11
Accepted: 2020.01.25

Abstract
The (2+1)-dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili equation describing the stability of solitons in a nonlinear media with weak dispersion is studied. For this purpose, based on the Hirota bilinear form, the linear superposition principle, and Zhou and Manukure approach, N-wave and positive N-complexiton solutions of the model are extracted. Dynamical behavior and physical characteristics of positive 2-complexiton are analyzed by two and three-dimensional graphs. It is believed that the current study has taken a useful step in presenting new results about the solutions of (2+1)-dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili equation.

Keywords: *(2+1)-dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili Equation, Hirota Bilinear Form، Linear Superposition Principle, N-wave Solution, Positive N-complexiton*

[1] Assistant Professor, Guilan University, Guilan, Iran. Email: mirzazadehs2@guilan.ac.ir
[2] Associate Professor, Mazandaran University, Mazandaran, Iran. (Corresponding Autor).
Email: mostafa.eslami@umz.ac.ir
[3] Assistant Professor, Department of Mathematics, Islamic Azad University, Rasht Branch,
Email: kamyar_hosseini@yahoo.com.
[4] M.Sc. in Mathematics, Guilan University, Guilan University, Iran.
Email: majid_samavat@yahoo.com.

فصلنامهٔ علمی فیزیک کاربردی ایران، دانشگاه الزهرا
سال نهم، پیاپی ۱۶، بهار ۱۳۹۸

مقاله پژوهشی

کمپلکسیتون Nـ گانهٔ مثبت معادلهٔ (۲+۱)ـ بعدی کادومتسف‌ـ پتویاشولی نوع ب[1]

محمدعلی میرزازاده[2]، مصطفی اسلامی[*3]، کامیار حسینی[4]، مجید سماوات[5]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۶/۲۰
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۵

چکیده

در این مقاله، معادلهٔ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف‌ـپتویاشولی نوع ب توصیف‌کنندهٔ پایداری سولیتون‌ها در محیط غیرخطی با پراکندگی ضعیف مطالعه می‌شود. بدین منظور، ابتدا با در نظر گرفتن صورت دوخطی هیروتا و به‌کارگیری روش برهم‌نهی خطی، جواب Nـ موجی استخراج و سپس با رهیافت ژو و مانکیور کمپلکسیتون Nـگانهٔ مثبت معادلهٔ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف‌ـپتویاشولی نوع ب حاصل می‌شود. در نهایت، رفتار دینامیکی و مشخصه‌های فیزیکی کمپلکسیتون 2ـگانهٔ مثبت با ارائهٔ نمودارهای دوبعدی و سه‌بعدی بررسی و تحلیل می‌شود.

[1] DOI: 10.22051/jap.2020.26845.1129

[2] استادیار، دانشکده علوم مهندسی، دانشگاه گیلان، گیلان، ایران. mirzazadehs2@guilan.ac.ir

[3] دانشیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه مازندران، مازندران، ایران. (نویسنده مسئول). mostafa.eslami@umz.ac.ir

[4] استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رشت. kamyar_hosseini@yahoo.com

[5] دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، دانشگاه گیلان، گیلان، ایران. majid_samavat@yahoo.com

باور داریم که مطالعهٔ حاضر گام مفیدی در ارائهٔ نتایج جدید در خصوص جواب‌های معادلهٔ (۲+۱)ـ بعدی کادومتسف‌ـپتویاشولی نوع ب برداشته است.

واژگان کلیدی: *معادلهٔ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف‌ـپتویاشولی نوع ب، صورت دوخطی هیروتا، روش برهم‌نهی خطی، جواب Nـ موجی، کمپلکسیتون Nـگانهٔ مثبت.*

۱. مقدمه

پدیده‌های بسیاری در فیزیک پلاسما و اپتیک غیرخطی و مکانیک سیالات به وسیلهٔ معادلات تکاملی غیرخطی توصیف می‌شوند. در دهه‌های اخیر توجه ویژه‌ای به جستجوی جواب‌های دقیق معادلات تکاملی غیرخطی از سوی پژوهشگران در حوزه‌های مختلف علمی صورت گرفته است. دلیل این موضوع را می‌توان در آن دانست که اطلاعات مفیدی از جواب‌های دقیق در خصوص پدیده‌های فیزیکی توصیف‌شده توسط معادلات تکاملی غیرخطی به دست می‌آید. روش‌های مختلفی برای به دست آوردن جواب‌های دقیق معادلات تکاملی غیرخطی به کار گرفته شده است که از جملهٔ آن‌ها می‌توان به روش کودریاشف [۱ـ۴]، روش تابع نمایی [۵ـ۸]، روش برهم‌نهی خطی [۹–۱۱]، روش هیروتا [۱۲] و روش تابع نمایی چندگانه [۱۳، ۱۴] اشاره کرد.

در مقالهٔ حاضر، معادلهٔ تکاملی غیرخطی زیر

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}+\frac{\partial^5 u(x,y,t)}{\partial x^5}-5\left(\frac{\partial^3 u(x,y,t)}{\partial x^2\partial y}+\int\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}dx\right)+15\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}+\right.$$
$$\left.u(x,y,t)\frac{\partial^3 u(x,y,t)}{\partial x^3}-u(x,y,t)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}-\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\int\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}dx\right)+$$
$$45u(x,y,t)^2\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}=0,$$

موسوم به معادلهٔ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف‌ـپتویاشولی نوع ب [۱۵ـ۱۷]، توصیف کننده پایداری سولیتون‌ها در محیطی غیرخطی با پراکندگی ضعیف توصیف می‌شود و کمپلکسیتون Nـگانهٔ مثبت آن ارائه می‌شود. معادلهٔ (۱) صورت دوخطی هیروتا به صورت زیر دارد،

$$\left(D_x^6-5D_x^3D_y-5D_y^2+D_xD_t\right)f.f=0,\quad u=(\ln f)_{xx},$$

که در آن، f تابع مجهول و D_x^6، $D_x^3D_y$، D_y^2، و D_xD_t اپراتورهای دوخطی هیروتا می‌باشند.

اخیراً معادلهٔ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف‌ـپتویاشولی نوع ب به وسیلهٔ محققین بسیاری با موفقیت مطالعه شده است. برای مثال، فنگ و همکارانش [۱۵] با اتخاذ توابع آزمون متفاوت، جواب‌هایی از قبیل امواج راگ و بریدر و وو و همکاران [۱۶] با به‌کارگیری توابع آزمون متفاوت با [۱۵] جواب‌هایی از قبیل لامپ و لامپ‌ـکینک را برای معادلهٔ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف‌ـپتویاشولی نوع ب استخراج نمودند.

ساختار مقاله چنین است: در بخش ۲، ابتدا با به‌کارگیری روش برهم‌نهی خطی، جواب Nـموجی استخراج و سپس با روندی مشابه با آنچه در [۱۸] ارائه شده کمپلکسیتون Nـگانۀ مثبت معادلۀ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف-پتویاشولی نوع ب حاصل می‌شود. در بخش ۳، رفتار دینامیکی و مشخصه‌های فیزیکی کمپلکسیتون 2ـگانۀ مثبت با ارائۀ نمودارهایی بررسی و تحلیل می‌شود. نتایج مطالعۀ حاضر در بخش آخر بازبینی و مرور می‌شود.

۲. مدل حاکم و کمپلکسیتون مثبت Nـگانۀ آن

در این بخش، ابتدا جواب Nـموجی معادلۀ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف-پتویاشولی نوع ب با استفاده از روش برهم‌نهی خطی استخراج می‌گردد. برای این منظور، a_j ها و c_j ها برای $j = 1,2,3$ طوری یافت می‌شوند که

$$a_1^6(x^{c_1} - y^{c_1})^6 - 5a_1^3(x^{c_1} - y^{c_1})^3 a_2(x^{c_2} - y^{c_2}) + a_1(x^{c_1} - y^{c_1}) a_3(x^{c_3} - y^{c_3}) - 5a_2^2(x^{c_2} - y^{c_2})^2 = 0.$$

با انتخاب $c_1 = 1$، $c_2 = 3$، و $c_3 = 5$ و جایگذاری آن‌ها در رابطۀ (۳)، دستگاه معادلات جبری غیرخطی زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
&a_1^6 - 5a_1^3 a_2 + a_1 a_3 - 5a_2^2 = 0,\\
&-6a_1^6 + 15a_1^3 a_2 - a_1 a_3 = 0,\\
&a_1^6 - a_1^3 a_2 = 0,\\
&-2a_1^6 + a_1^3 a_2 + a_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

از حل این دستگاه غیرخطی مقادیر زیر حاصل می‌شوند

$$a_2 = a_1^3,\ a_3 = 9a_1^5.$$

حال، با فرض $a_1 = 1$، جواب Nـموجی معادلۀ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف-پتویاشولی نوع ب به صورت زیر به دست می‌آید

$$u(x,y,t) = \big(\ln f(x,y,t)\big)_{xx}, \quad f(x,y,t) = \sum_{j=1}^{N} d_j e^{\omega_j}, \quad \omega_j = k_j x + k_j^3 y + 9k_j^5 t,$$

که در آن k_j ها و d_j ها ثابت‌هایی دلخواه و N عدد صحیح مثبت است.

برای به دست آوردن کمپلکسیتون Nـگانۀ معادلۀ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف-پتویاشولی نوع ب، با فرض

$$k_j = k_{1j} + ik_{2j}, \quad j = 1,\dots,N, \quad i^2 = -1,$$

می‌یابیم

$$\begin{aligned}
\omega_j &= k_j x + k_j^3 y + 9k_j^5 t\\
&= k_j x + \big(k_j^3 - 3k_j k_{2j}^2\big)y + \big(9k_j^5 - 90k_j^3 k_{2j}^2 + 45k_j k_{2j}^4\big)t\\
&\quad + i\big(k_{2j} x + \big(3k_j^2 k_{2j} - k_{2j}^3\big)y + \big(45k_j^4 k_{2j} - 90k_j^2 k_{2j}^3 + 9k_{2j}^5\big)t\big)\\
&= \omega_{j,1} + i\omega_{j,2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_j &= \bar{k}_j x + \bar{k}_j^3 y + 9\bar{k}_j^5 t \\ &= k_j x + \left(k_j^3 - 3k_j k_{2j}^2\right)y + \left(9k_j^5 - 90k_j^3 k_{2j}^2 + 45k_j k_{2j}^4\right)t \\ &- i\left(k_{2j}x + \left(3k_j^2 k_{2j} - k_{2j}^3\right)y + \left(45k_j^4 k_{2j} - 90k_j^2 k_{2j}^3 + 9k_{2j}^5\right)t\right) \\ &= \omega_{j,1} - i\omega_{j,2}.\end{aligned}$$

چون $f = e^{\omega_j}$ و $\bar{f} = e^{\bar{\omega}_j}$ جواب‌هایی برای معادلهٔ دوخطی هیروتـای (۲) هسـتند، بـا اسـتفاده از اصل برهم‌نهی خطی، عبارت زیر نیز جوابی برای معادلهٔ دوخطی هیروتای (۲) است،

$$f(x,y,t) = \sum_{j=1}^{N}\left(d_j e^{\omega_j} + \bar{d}_j e^{\bar{\omega}_j}\right) = \sum_{j=1}^{N} e^{\omega_{j,1}}\left(d_{j,1}\cos\left(\omega_{j,2}\right) + d_{j,2}\sin\left(\omega_{j,2}\right)\right),$$

اکنون، کمپلکسیتون Nـگانه معادلهٔ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف‌ـپتویاشولی نوع ب به صورت زیر بـه دست می‌آیند

$$u(x,y,t) = \left(\ln f\,(x,y,t)\right)_{xx}, \quad f(x,y,t) = \sum_{j=1}^{N} e^{\omega_{j,1}}\left(d_{j,1}\cos\left(\omega_{j,2}\right) + d_{j,2}\sin\left(\omega_{j,2}\right)\right), \quad \omega_j = k_j x + k_j^3 y + 9k_j^5 t = \omega_{j,1} + i\omega_{j,2}, \quad d_{j,1}, d_{j,2} \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1.$$

در نهایت برای یافتن کمپلکسیتون Nـگانه مثبت معادلهٔ (۲+۱)ـبعدی کادومتسـف‌ـپتویاشـولی نـوع ب، ابتدا با در نظر گرفتن e^{ω_j}، $e^{-\omega_j}$، اصل برهم‌نهی خطی و تعریف تابع کسینوس هـذلولوی جوابی به شکل زیر

$$\frac{e^{\omega_j} + e^{-\omega_j}}{2} = \cosh\left(\omega_j\right), \quad j = 1,\dots,N,$$

برای معادلهٔ دوخطی هیروتای (۲) به دست آورد، که بـه‌کـارگیری مجـدد اصـل بـرهم‌نهـی خطـی جوابی به صورت

$$\sum_{j=1}^{N} d_j \cosh\left(\omega_j\right), \quad d_j \in \mathbb{R},$$

برای معادلهٔ دوخطی هیروتای (۲) نتیجه می‌دهد.

حال فرض کنید که $k_j,\ j = N+1,\dots,N+M$ ثابت‌هایی حقیقی و متمایز باشند و

$$\begin{aligned}\omega_j &= \left(ik_j\right)x + \left(ik_j\right)^3 y + 9\left(ik_j\right)^5 t = i\left(k_j x - k_j^3 y + 9k_j^5 t\right), \\ -\omega_j &= -\left(\left(ik_j\right)x + \left(ik_j\right)^3 y + 9\left(ik_j\right)^5 t\right) = -i\left(k_j x - k_j^3 y + 9k_j^5 t\right).\end{aligned}$$

در این صورت بدیهی است که e^{ω_j} و $e^{-\omega_j}$ دو جواب مختلط معادلهٔ دوخطی هیروتـای (۲) و بـا توجه به اصل برهم‌نهی خطی عبارت

$$\frac{e^{\omega_j} + e^{-\omega_j}}{2} = \cos\left(k_j x - k_j^3 y + 9k_j^5 t\right), \quad j = N+1,\dots,N+M,$$

هم جوابی حقیقی برای معادلهٔ دوخطی هیروتای (۲) است. به‌کارگیری مجدد اصل برهم‌نهی خطی جوابی حقیقی به صورت

$$\sum_{j=N+1}^{N+M} d_j \cos\left(k_j x - k_j^3 y + 9k_j^5 t\right), \quad d_j \in \mathbb{R},$$

برای معادلهٔ دوخطی هیروتای (۲) نتیجه می‌دهد. در نهایت، کمپلکسیتون Nـگانهٔ مثبت معادلهٔ (۱+۲)بعدی کادومتسف-پتویاشولی نوع ب به صورت زیر حاصل می‌شود

$$u(x,y,t)=\left(\ln f\,(x,y,t)\right)_{xx},\quad f(x,y,t)=\sum_{j=1}^{N} d_j\cosh\left(k_jx+k_j^3y+9k_j^5t\right)+\sum_{j=N+1}^{N+M} d_j\cos\left(k_jx-k_j^3y+9k_j^5t\right),\quad d_j>0\quad \text{for}\quad j=1,2,\dots,N\quad\text{and}\quad \sum_{j=1}^{N} d_j>\sum_{j=N+1}^{N+M}\left|d_j\right|.$$

با فرض $N=M=1$، $k_1=-1$، $k_2=1$، $d_1=1$، و $d_2=0.5$ می‌یابیم

$$k_1x+k_1^3y+9k_1^5t=-(x+y+9t),$$
$$k_2x-k_2^3y+9k_2^5t=x-y+9t.$$

بنابراین، کمپلکسیتون ۲ـگانهٔ مثبت زیر نتیجه می‌شود

$$u(x,y,t)=\left(\ln f\,(x,y,t)\right)_{xx}, \tag{۴}$$

به طوری که

$$f(x,y,t)=\frac{1.5+2\sinh(x+y+9t)\sin(x-y+9t)}{(\cosh(x+y+9t))^2+\cosh(x+y+9t)\cos(x-y+9t)+0.25(\cos(x-y+9t))^2}.$$

قابل توجه است که می‌توان کمپلکسیتونی ۲ـگانه با استفاده از رهیافت به‌کاررفته در [۱۹] به صورت زیر به دست آورد. برای این منظور، فرض کنید که صورت دوخطی هیروتای (۲) جوابی به شکل زیر داشته باشد

$$f(x,y,t)=1+2e^{\omega_1}\cos(\omega_2)+a_{12}e^{2\omega_1},$$

که در آن

$$\omega_1=k_1x+r_1y+w_1t,\qquad \omega_2=k_2x+r_2y+w_2t,$$

و w_1 و w_2 در روابط زیر صدق کنند

$$P(k,r,w)=P(\bar{k},\bar{r},\bar{w})=0,\quad k=k_1+ik_2,\quad r=r_1+ir_2,\quad w=w_1+iw_2,\quad P=x^6-5x^3y-5y^2+xt,\quad i=\sqrt{-1}.$$

به آسانی می‌توان نشان داد که

$$w_1=-(k_1^7-9k_1^5k_2^2-5k_1^3k_2^4+5k_1k_2^6-5k_1^4r_1+10k_1^3k_2r_2+10k_1k_2^3r_2+5k_2^4r_1-5k_1r_1^2+5k_1r_2^2-10k_2r_1r_2)/(k_1^2+k_2^2),$$

$$w_2=-(5k_1^6k_2-5k_1^4k_2^3-9k_1^2k_2^5+k_2^7-5k_1^4r_2-10k_1^3k_2r_1-10k_1k_2^3r_1+5k_2^4r_2-10k_1r_1r_2+5k_2r_1^2-5k_2r_2^2)/(k_1^2+k_2^2),$$

$$\begin{aligned}a_{12}=-\frac{P(2ik_2,2ir_2,2iw_2)}{P(2k_1,2r_1,2w_1)}&=-(k_1^6k_2^2-k_1^4k_2^4-5k_1^2k_2^6-3k_2^8-k_1^4k_2r_2-2k_1^3k_2^2r_1\\&-4k_1^2k_2^3r_2-2k_1k_2^4r_1-3k_2^5r_2+k_1^2r_2^2-2k_1k_2r_1r_2+k_2^2r_1^2)\\&/\left(3k_1^8+5k_1^6k_2^2+k_1^4k_2^4-k_1^2k_2^6-3k_1^5r_1-2k_1^4k_2r_2-4k_1^3k_2^2r_1\right.\\&\left.-2k_1^2k_2^3r_2-k_1k_2^4r_1-k_1^2r_2^2+2k_1k_2r_1r_2-{k_2}^2r_1^2\right).\end{aligned}$$

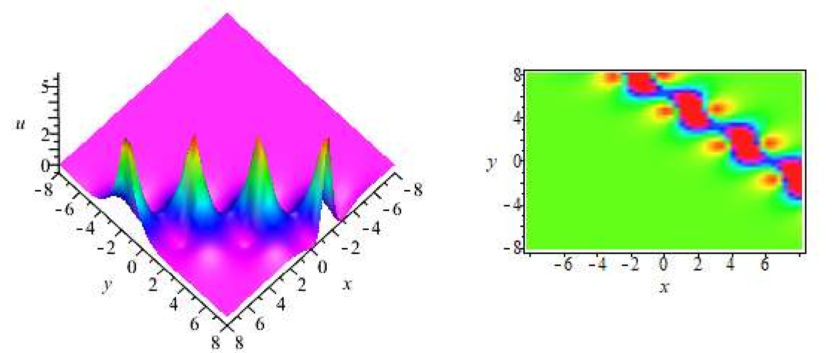
در نهایت، کمپلکسیتونی ۲ـگانه به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$u(x,y,t) = \left(\ln\left(1 + 2e^{\omega_1}\cos(\omega_2) + a_{12}e^{2\omega_1}\right)\right)_{xx},$$

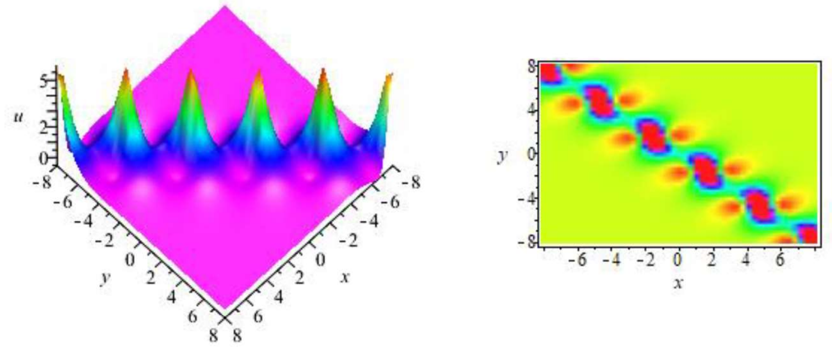
که در آن، ω_1، ω_2، و a_{12} در بالا تعریف شده‌اند.

۳. رفتار دینامیکی کمپلکسیتون 2ـگانهٔ مثبت

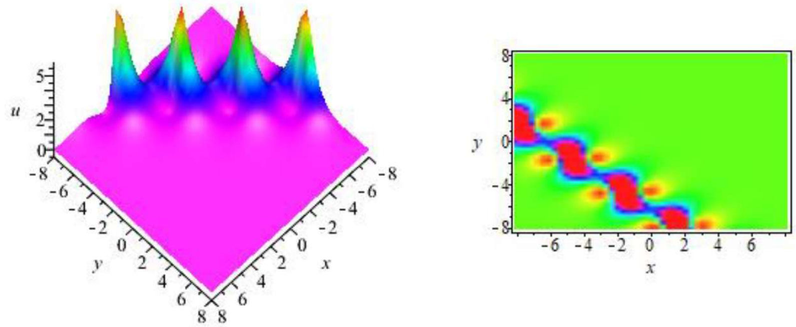
در این بخش، رفتار دینامیکی و مشخصه‌های فیزیکی کمپلکسیتون 2ـگانهٔ مثبت با استفاده از نمودارهایی دو بعدی و سه‌بعدی بررسی و تحلیل می‌شود. به این منظور، کمپلکسیتون 2ـگانه مثبت برای مقادیر متفاوتی از زمان t در شکل‌های ۱ و ۲ و ۳ نمایش داده می‌شوند. کمپلکسیتون 2ـگانهٔ مثبت (۴) و نمودارهای متناظر با آن حقیقتاً نشان‌دهندهٔ یک موج بریدر می‌باشند. بریدرها امواجی غیرخطی هستند که در آن‌ها انرژی به صورت محلی و نوسانی متمرکز می‌شود. بریدرها ساختار سولیتونیک دارند و شامل دو نوع ایستاده و حرکتی می‌شوند. همچنین، کمپلکسیتون ۲ـگانهٔ (۵) برای مقادیر مناسبی از پارامترهای موجود در شکل ۴ رسم شده است.



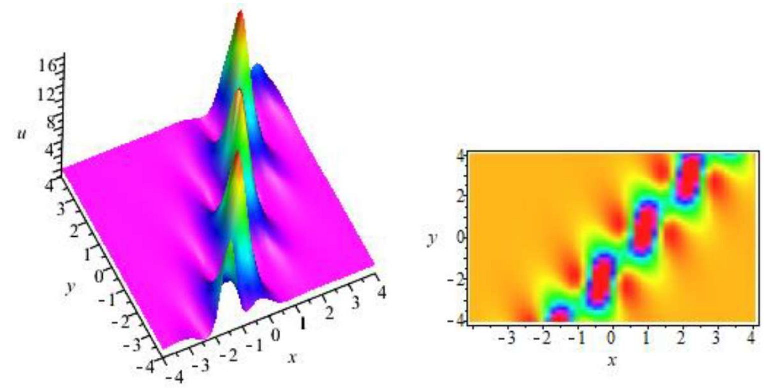
شکل ۱ کمپلکسیتون 2ـگانهٔ مثبت وقتی $k_1 = -1$، $k_2 = 1$، $d_1 = 1$، $d_2 = 0.5$، و $t = -0.7$.



شکل ۲ کمپلکسیتون 2ـگانهٔ مثبت وقتی $k_1 = -1$، $k_2 = 1$، $d_1 = 1$، $d_2 = 0.5$، و $t = 0$.



شکل ۳ کمپلکسیتون 2ـگانهٔ مثبت وقتی $k_1 = -1$، $k_2 = 1$، $d_1 = 1$، $d_2 = 0.5$، و $t = 0.7$.



شکل ۴ کمپلکسیتون 2ـگانهٔ (۵) وقتی $k_1 = -2$، $k_2 = -3$، $r_1 = 1$، $r_2 = -1$، و $t = 0$.

۴. نتیجه

در این مقاله، یک معادلهٔ تکاملی غیرخطی توصیف‌کنندهٔ پایداری سولیتون‌ها در محیط غیرخطی با پراکندگی ضعیف موسوم به معادلهٔ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف‌ـپتویاشولی نوع ب به صورت تحلیلی با موفقیت مطالعه شد. در این خصوص، ابتدا جواب Nـموجی با توجه به صورت دوخطی هیروتا و استفاده از روش برهم‌نهی خطی به کمک محاسبات سیمبولیک استخراج شد. در ادامه، با رهیافت به‌کاررفته توسط ژو و مانکیور کمپلکسیتون Nـگانه و همچنین کمپلکسیتون Nـگانهٔ مثبت معادلهٔ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف‌ـپتویاشولی نوع ب حاصل شد. نمودارهایی دوبعدی و سه‌بعدی جهت نشان دادن رفتار دینامیکی و مشخصه‌های فیزیکی کمپلکسیتون 2ـگانهٔ مثبت ارائه و در خصوص تناظر کمپلکسیتون 2ـگانهٔ مثبت با موج بریدر بحث شد. به نظر نویسندگان، مطالعهٔ حاضر گام مفیدی در ارائهٔ نتایج جدید در خصوص جواب‌های معادلهٔ (۲+۱)ـبعدی کادومتسف‌ـپتویاشولی نوع ب برداشت.

منابع

[1] Kudryashov N.A., “One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 17 (2012) 2248–2253.

[2] Mirzazadeh M., Eslami M., Biswas A., “Dispersive optical solitons by Kudryashov’s methods”, *Optik* 125 (2014) 6874–6880.

[3] Ilie M., Biazar J., Ayati Z., “Analytical study of exact traveling wave solutions for time-fractional nonlinear Schrodinger equations”, *Optical and Quantum Electronics*, 50 (2018) 413.

[4] Hosseini K., Mayeli P., Kumar D., “New exact solutions of the coupled sine-Gordon equations in nonlinear optics using the modified Kudryashov method”, *Journal of Modern Optics*, 65 (2018) 361–364.

[5] He J.H., Wu X.H., “Exp-function method for nonlinear wave equations”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 30 (2006) 700–708.

[6] Ali A.T., Hassan E.R., “General exp_a function method for nonlinear evolution equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (2010) 451–459.

[7] Hosseini K., Manafian J., Samadani F., Foroutan M., Mirzazadeh M., Zhou Q., “Resonant optical solitons with perturbation terms andfractional temporal evolution using improved $\tan(\phi(\eta)/2)$-expansion method and exp function approach”, *Optik* 158 (2018) 933–939.

[8] Hosseini K., Ayati Z., Ansari R., “New exact solution of the Tzitzéica type equations in nonlinear optics using the exp_a function method”, *Journal of Modern Optics*, 65 (2018) 847–851.

[9] Ma W.X., Fan E., “Linear superposition principle applying to Hirota bilinear equations”, *Computers and Mathematics with Applications*, 61 (2011) 950–959.

[10] Zhang L., Khalique C.M., Ma W.X., “Classifying bilinear differential equations by linear superposition principle”, *International Journal of Modern Physics*, B 30 (2016) 1640029.

[11] Zhou Y., Ma W.X., “Applications of linear superposition principle to resonant solitons and complexitons”, *Computers and Mathematics with Applications*, 73 (2017) 1697–1706.

[12] Hirota R., *The direct method in soliton theory*, (Cambridge University Press, 2004).

[13] Ma W.X., Huang T., Zhang Y., “A multiple exp-function method for nonlinear differential equations and its application”, *Physica Scripta*, 82 (2010) 065003.

[14] Adem A.R., Mirzazadeh M., Zhou Q., Hosseini K., “Multiple soliton solutions of the Sawada–Kotera equation with a nonvanishing boundary condition and the perturbed Korteweg de Vries equation by using the multiple exp-function scheme”, *Advances in Mathematical Physics*, 2019 (2019) 3175213.

[15] Feng L.L., Tian S.F., Wang X.B., Zhang T.T., “Rogue waves, homoclinic breather waves and soliton waves for the (2+1)-dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Applied Mathematics Letters*, 65 (2017) 90–97.

[16] Wu P., Zhang Y., Muhammad I., Yin Q., Lump, “Periodic lump and interaction lump stripe solutions to the (2+1)-dimensional B-type Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Modern Physics Letters*, B 32 (2018) 1850106.

[17] Wazwaz A.M., “Two B-type Kadomtsev–Petviashvili equations of (2+1) and (3+1) dimensions: Multiple soliton solutions, rational solutions and periodic solutions”, *Computers & Fluids*, 86 (2013) 357–362.

[18] Zhou Y., Manukure S., “Complexiton solutions to the Hirota–Satsuma–Ito equation”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (2019), doi.10.1002/mma.5512.

[19] Zhou Y., Ma W.X., “Complexiton solutions to soliton equations by the Hirota method”, *Journal of Mathematical Physics*, 58 (2017) 101511.