

Research Paper

Time Evolution of Tight-Binding Model in the Presence of Electric Field ¹

Saeid Ansari²

Received: 2025.01.29

Revised: 2025.04.23

Accepted: 2025.05.13

1. Introduction

In quantum mechanics, the Hermitian nature of the Hamiltonian is considered a fundamental condition in an isolated system, ensuring the conservation of the probability function and restricting energy to real values. However, it has been demonstrated that non-Hermitian Hamiltonians with parity-time symmetry can possess a real energy spectrum while also preserving the unitarity of time evolution. Many quantum systems, such as non-equilibrium systems and open systems, involving energy absorption or dissipation, are described by non-Hermitian Hamiltonians. Although many theorems exist about the characteristics of equilibrium quantum systems, the dynamical behavior of out-of-equilibrium systems is far less understood. It is demonstrated that dynamical free energy is important in determining the non-equilibrium dynamic signature in dynamical phase transitions. The presence of singularities in the time evolution of a physical quantity makes the dynamic behavior of the system interesting. In recent years, dynamical quantum phase transitions have significantly enhanced our understanding of phase transitions in non-equilibrium systems. This behavior can occur even in the case of a single-particle system such as the tight-binding model. The tight-binding model, despite its simplicity, has extensive applications in solid-state physics; therefore, investigating its dynamical quantum phase transitions can help us better understand the behavior of this system in a non-equilibrium state.

2. Methodology

We study the time evolution of the wave function in a one-dimensional tight-binding lattice with periodic boundary conditions subjected to external DC and AC electric fields. First, we present the Hamiltonian of the tight-binding model and the analytical solution of the corresponding time-dependent

¹ <https://doi.org/10.22051/ijap.2025.49828.1446>

² Assistant Professor, Department of Engineering Science and Physics, Buein Zahra Technical University, Buein Zahra, Iran. Email: ansari@bzte.ac.ir

<https://ijap.alzahra.ac.ir>



Schrödinger equation. Then, the non-analytical dynamic behavior of the system is studied by investigating the divergence of dynamical free energy for three different electric field cases: DC, AC, and DC+AC.

3. Results and Discussion

We demonstrated that when the system is subjected to a static electric field, an analytical solution allows us to first derive the condition for the existence of a phase transition and, secondly, predict the critical times of the system's dynamical phase transition. In the case where the system is driven solely by a periodic electric field, an analytical determination of all phase transition times is not feasible, and numerical methods must be employed. However, we demonstrated how a subset of critical times can still be determined analytically. In the presence of both static and periodic fields, the relationships become more complex, and phase transition times can only be identified using numerical methods and by plotting the dynamical free energy function. However, in this case, we can still determine certain characteristics of the dynamical free energy function. Firstly, we demonstrated that the periodicity of dynamical free energy is identifiable, and the magnitude of the period is independent of the amplitude of the AC field. Secondly, it can be analytically demonstrated that dynamical free energy is invariant under time-reversal transformation.

4. Conclusion

If a one-dimensional tight-binding lattice with periodic boundary conditions is placed in a constant driving electric field, utilizing analytical solutions, firstly, the phase transition only occurs when the field strength is weaker than a boundary value. Secondly, the critical times of the system's dynamical phase transition can also be analytically predicted. In the presence of a purely periodic electric field, in addition to numerical methods, some of the critical times can be determined analytically. When constant and periodic fields, both, are present, it is possible to show the periodicity of the dynamical free energy and its invariance under time-reversal transformations.

It is worth noting that system size limitations do not significantly affect the behavior of dynamic free energy, except for a reduction in the peak heights of dynamic free energy. However, the presence of disorder can alter the timing and periodicity of dynamic phase transitions. Additionally, considering that dynamic phase transitions are defined based on the singularity of dynamic free energy, which itself corresponds to the overlap between two wave functions, changes in occupancy number or Fermi energy level are not expected to cause significant alterations in the results, except for potential shifts in the timing of dynamical phase transitions.

Keywords: *Tight-Binding Model, Non-equilibrium Systems, Dynamical Phase Transition.*



References

- [1] Dirac, P.A.M., "Bakerian lecture-the physical interpretation of quantum mechanics", *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 180(980), 1-40, 1942. <https://doi.org/10.1098/rspa.1942.0023>
- [2] Bender, C.M. and Boettcher, S., "Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having P T symmetry", *Physical review letters* 80(24), 5243, 1998. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.5243>
- [3] Bender, C.M., Brody, D.C. and Jones, H.F., "Complex extension of quantum mechanics" *Physical review letters* 89(27), 270401, 2002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.270401>
- [4] Bender, C.M., "Making sense of non-Hermitian Hamiltonians" *Reports on Progress in Physics* 70(6), 947, 2007. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/70/6/R03>
- [5] Ashida, Y., Gong, Z. and Ueda, M., "Non-hermitian physics", *Advances in Physics* 69(3), 249-435, 2020. <https://doi.org/10.1080/00018732.2021.1876991>
- [6] Lee, T.E., "Anomalous edge state in a non-Hermitian lattice", *Physical review letters* 116(13), 133903, 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.133903>
- [7] Longhi, S., "Topological Phase Transition in non-Hermitian Quasicrystals", *Phys. Rev. Lett.*, 122, 237601, 2019. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.237601>.
- [8] Longhi, S., "Phase transitions in a non-Hermitian Aubry-André-Harper model", *Phys. Rev. B*, 103, 054203, 2021. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.054203>.
- [9] Yao, S., Song, F., and Wang, Z., "Non-Hermitian Chern Bands", *Phys. Rev. Lett.*, 121, 136802, 2018. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.136802>.
- [10] Yang, Z., Zhang, K., Fang, C., and Hu, J., "Non-Hermitian Bulk-Boundary Correspondence and Auxiliary Generalized Brillouin Zone Theory", *Phys. Rev. Lett.*, 125, 226402, 2020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.226402>.
- [11] Lee, C. H. and Thomale, R., "Anatomy of skin modes and topology in non-Hermitian systems", *Phys. Rev. B*, 99, 201103, 2019. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.99.201103>.
- [12] Liu, Y., Wang, Y., Zheng, Z., and Chen, S., "Non-Hermitian mobility edges in one-dimensional quasicrystals with parity-time symmetry", *Phys. Rev. B*, 103, 134208, 2021. <https://doi.org/10.1007/s11433-0211802-4>
- [13] Helbig, T., Hofmann, T., Imhof, S., Abdelghany, M., Kiessling, T., Molenkamp, L., Lee, C., Szameit, A., Greiter, M., and Thomale, R., "Generalized bulk-boundary correspondence in non-Hermitian topoelectrical circuits", *NAT. Phys.*, 16, 747, 2020. <https://doi.org/10.1038/s41567-020--09229>.

- [14] Zhang, X-X. and Franz, M., "Non-Hermitian Exceptional Landau Quantization in Electric Circuits", *Phys. Rev. Lett.*, 124, 046401, 2020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.046401>.
- [15] Schomerus, H., "Topologically protected midgap states in complex photonic lattices", *Opt. Lett.*, 38, 1912, 2013., <https://doi.org/10.1364/ol.38.001912>.
- [16] Liang, Q., Xie, D., Dong, Z., Li, H., Li, H., Gadway, B., Yi W., and Yan, B., "Dynamic Signatures of Non-Hermitian Skin Effect and Topology in Ultracold Atoms", *Phys. Rev. Lett.*, 129, 070401, 2022. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.070401>.
- [17] Li, J., Harter, A. K., Liu, J., de Melo, L., Joglekar, Y. N. and Luo, L., "Observation of parity-time symmetry breaking transitions in a dissipative Floquet system of ultracold atoms", *Nat. Commun.*, 10, 855, 2019. <https://doi.org/10.1038/s41467-019-08596-1>.
- [18] Weidemann, S., Kremer, M., Helbig, T., Hofmann, T., Stegmaier, A., Greiter, M., Thomale, R., and Szameit, A., "Topological funneling of light", *Science*, 368, 311, 2020. <https://doi.org/10.1126/science.aaz8727>.
- [19] Zhang, W., Ouyang, X., Huang, X., Wang, X., Zhang, H., Yu Y., Chang, X., Liu, Y., Deng, D-L., and Duan, L-M., "Observation of Non-Hermitian Topology with Nonunitary Dynamics of Solid-State Spins", *Phys. Rev. Lett.*, 127, 090501, 2021. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.090501>.
- [20] Akulin, V. M., "Coherent Dynamics of Complex Quantum Systems", *Springer-Verlag, Berlin*, 2006.
- [21] Dunlap, D. H. and Kenkre, V. M., "Dynamic localization of a charged particle moving under the influence of an electric field", *Phys. Rev. B*, 34, 3625, 1986. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.34.3625>.
- [22] Grossmann, F., Dittrich, T., Jung, P., and Hänggi, P., "Coherent destruction of tunneling", *Phys. Rev. Lett.*, 67, 516, 1991. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.516>.
- [23] Heyl, M., Polkovnikov, A., and Kehrein, S., "Dynamical Quantum Phase Transitions in the Transverse-Field Ising Model", *Phys. Rev. Lett.*, 110, 135704, 2013. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.135704>.
- [24] Heyl, M., "Scaling and Universality at Dynamical Quantum Phase Transitions", *Phys. Rev. Lett.*, 115, 140602, 2015. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.140602>.
- [25] Budich, J. C. and Heyl, M., "Dynamical topological order parameters far from equilibrium", *Phys. Rev. B*, 93, 085416, 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.085416>.
- [26] Huang, Z. and Balatsky, A. V., "Dynamical Quantum Phase Transitions: Role of Topological Nodes in Wave Function Overlaps", *Phys. Rev. Lett.*, 117, 086802, 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.086802>.



- [27] Zamani, S., Naji, J., Jafari, R., Langari, A., "Scaling and universality at ramped quench dynamical quantum phase transitions", *J. Phys. Condens. Matter*, 36, 355401, 2024. <https://doi.org/10.1088/1361-648X/ad4df9>.
- [28] Ansari, S., Akbari, A., Jafari, R., "Dynamics of steered quantum coherence and magic resource under sudden quench", *Quantum Inf. Process.* 23, 212, 2024. <https://doi.org/10.1007/s11128-024-04414-w>.
- [29] Jafari, R., Langari, A., Eggert, S., Johannesson, H., "Dynamical quantum phase transitions following a noisy quench", *Phys. Rev. B*, 109, 180303, 2024. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.109.L180303>.
- [30] Ansari, S. and Jafari, R., "One-dimensional p-wave superconductivity with long-range hopping and pairing", *Iran. J. Phys. Res*, 21, 81, 2021. <https://doi.org/10.47176/ijpr.20.2.35211>. (in Persian)
- [31] Ansari, S. and Jafari, R., "Dynamical phase transition in n-cluster spin model", *Res. Many. Sys.*, 9, 29, 2019. <https://doi.org/10.22055/jrmb.2019.14922>. (in Persian)
- [32] Jafari, R., "Quantum phase transition in the one-dimensional extended quantum compass model in a transverse field", *Phys. Rev. B*, 84, 035112, 2011. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.035112>.
- [33] Gorin, T., Prosen, T., Seligman, T. H., and Znidaric, M., "Dynamics of Loschmidt echoes and fidelity decay", *Phys. Rep.*, 435, 33, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.09.003>.
- [34] Quan, H. T., Song, Z., Liu, X. F., Zanardi, P., and Sun, C. P., "Decay of Loschmidt Echo Enhanced by Quantum Criticality", *Phys. Rev. Lett.*, 96, 140604, 2006. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.140604>.
- [35] Jafari, R. and Johannesson, H., "Loschmidt Echo Revivals: Critical and Noncritical", *Phys. Rev. Lett.*, 118, 015701, 2017. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.015701>.
- [36] Halimeh, J. C. and Zauner-Stauber, V., "Dynamical phase diagram of quantum spin chains with long-range interactions", *Phys. Rev. B*, 96, 134427, 2017. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.134427>.
- [37] Hickey, J. M., "Timescales, dynamical phase transitions and 3rd order phase transitions in the 1d anisotropic XY model", arXiv:1403.5515, 2014.
- [38] Vajna, S. and Dóra, B., "Disentangling dynamical phase transitions from equilibrium phase transitions", *Phys. Rev. B*, 89, 161105R, 2014. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.89.161105>.
- [39] Lang, J., Frank, B., and Halimeh, J. C., "Dynamical Quantum Phase Transitions: A Geometric Picture", *Phys. Rev. Lett.*, 121, 130603, 2018. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.130603>.
- [40] Jafari, R., Johannesson H., Langari, A., Martin-Delgado, M. A., "Quench dynamics and zero-energy modes: The case of the Creutz model", *Phys. Rev. B*, 99, 054302, 2018. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.99.054302>.
- [41] Sharma, S., Suzuki, S., and Dutta, A., "Quenches and dynamical phase transitions in a nonintegrable quantum Ising model", *Phys. Rev. B*, 92, 104306, 2015. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.92.104306>.

- [42] Schmitt, M. and Kehrein, S., "Dynamical quantum phase transitions in the Kitaev honeycomb model", *Phys. Rev. B*, 92, 075114, 2015. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.92.075114>.
- [43] Budich, J. C. and Heyl, M., "Dynamical topological order parameters far from equilibrium", *Phys. Rev. B*, 93, 085416, 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.085416>.
- [44] Sharma, S., Divakaran, U., Polkovnikov A., and Dutta A., Slow quenches in a quantum Ising chain: Dynamical phase transitions and topology", *Phys. Rev. B*, 93, 144306, 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.144306>.
- [45] Peng, Y., Jie, J., Yu, D., and Wang, Y., "Manipulating non-Hermitian skin effect via electric fields", *Phys. Rev. B*, 106, 161402, 2022. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.106.L161402>.
- [45] Graham, R., Schlautmann, M., and Zoller, P., "Dynamical localization of atomic-beam deflection by a modulated standing light wave", *Phys. Rev. A*, 45, 19, 1992. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.R19>.
- [46] Waschke, C., Roskos, H., Schwedler, R., Leo, K., Kurz, H., Kohler, K., "Coherent submillimeter-wave emission from Bloch oscillations in a semiconductor superlattice", *Phys. Rev. Lett.*, 70, 3319, 1993. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.3319>.
- [47] Faisal, F. H. M. and Kaminski, J. Z., "Generation and control of high harmonics by laser interaction with transmission electrons in a thin crystal", *Phys. Rev. A*, 54, R1769, 1996. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.54.R1769>.



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).



تحول زمانی الگوی تنگابست در حضور میدان الکتریکی^۱

سعید انصاری^۲

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران

دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا

سال پانزدهم، پیاپی ۴۱، تابستان ۱۴۰۴

صص ۲۴ - ۳۸

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۱۰

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۲/۰۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۲۳

چکیده:

با وجود این که نظریه‌های گوناگونی در مورد ویژگی‌های در حال تعادل یک سامانه کوانتومی وجود دارد، اما رفتار دینامیکی چنین سامانه‌هایی کم‌تر شناخته شده است. نشان داده شده است که انرژی آزاد دینامیکی نقش مهمی در مشخص کردن اثر دینامیک غیرتعادلی در گذار فاز دینامیکی دارد. در حقیقت، وجود تکینگی‌ها در تحول زمانی یک کمیت فیزیکی سبب می‌شود که رفتار دینامیکی سامانه جالب توجه باشد. این رفتار حتی در مورد یک سامانه تک ذره‌ای چون الگوی تنگابست نیز می‌تواند رخ دهد. در این مقاله دینامیک غیرتعادلی شبکه تنگابست یک بعدی با شرط مرزی تناوبی، که تحت تأثیر میدان الکتریکی خارجی DC و AC است، با استفاده از مفهوم گذار فاز کوانتومی دینامیکی بررسی می‌شود. اگر سامانه در میدان الکتریکی ثابت قرار داشته باشد، با بهره‌مندی از حل تحلیلی، در ابتدا می‌توان نشان داد که شرط وجود گذار فاز این است که شدت میدان از یک مقدار حدی ضعیف‌تر باشد. سپس، زمان‌های بحرانی گذار فاز دینامیکی سامانه نیز به صورت تحلیلی قابل پیش‌بینی است. در حضور میدان الکتریکی صرفاً تناوبی افزون بر روش عددی می‌توان برخی از زمان‌های بحرانی را با استفاده از حل تحلیلی مشخص کرد. در حالت کلی که هر دو میدان ثابت و تناوبی وجود دارند، با اینکه مشخص کردن گذار فاز با روش‌های عددی امکان‌پذیر است، اما می‌توان دوره تناوب انرژی آزاد دینامیکی و همچنین ناوردایی آن تحت تبدیل وارونی زمان را به روش تحلیلی نشان داد.

واژگان کلیدی: الگوی تنگابست، سامانه‌های دور از تعادل، گذار فاز دینامیکی.

^۱ <https://doi.org/10.22051/ijap.2025.49828.1446>

^۲ استادیار، گروه علوم مهندسی و فیزیک، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین‌زهرا، بوئین‌زهرا، ایران. Email: ansari@bzte.ac.ir



۱. مقدمه

در مکانیک کوانتوم هر میتی بودن هامیلتونی به عنوان یک شرط بنیادی، در یک سامانه منزوی، پایستار بودن تابع احتمال را تضمین و انرژی را به مقادیر حقیقی محدود می کند [۱]. با این وجود، نشان داده شده است که هامیلتونی های غیرهرمیتی با تقارن پاریته-زمانی می توانند هم طیف انرژی حقیقی داشته باشند و هم یکانی بودن تحول زمانی در آن ها حفظ می شود [۴-۲]. بسیاری از سامانه ها مانند سامانه های دور از تعادل و سامانه های باز، با جذب یا اتلاف انرژی، در عمل با هامیلتونی غیرهرمیتی توصیف می شوند. به ویژه در سال های کنونی، فیزیک سامانه های غیرهرمیتی مورد توجه بسیاری، هم از بعد نظری [۵] و هم آزمایشگاهی قرار گرفته است. از جمله در حوزه نظری می توان به مطالعه ویژگی توپولوژیکی سامانه ها [۸-۶]، تناظر توده-لبه [۱۱-۹] و شبه بلورها [۱۲] در بخش تجربی به کاربرد در مدارهای الکترونیکی [۱۵-۱۳]، اتم های فوق سرد [۱۶، ۱۷]، فوتونیک [۱۸] و سامانه های کوانتومی باز [۱۹] اشاره کرد.

با وجود اینکه نظریه های گوناگونی در مورد ویژگی های در حال تعادل یک سامانه کوانتومی وجود داد، اما رفتار دینامیکی چنین سامانه هایی کم تر شناخته شده است. به صورت کلی، وقتی در مورد دینامیک یک سامانه صحبت می کنیم، به تحول زمانی تابع موج و یا مقدار چشمداشتی کمیت های فیزیکی مختلف می پردازیم. در حقیقت، وجود تکنیکی ها در تحول زمانی یک کمیت فیزیکی سبب می شود که رفتار دینامیکی سامانه جالب توجه باشد [۲]. این رفتار حتی در مورد یک تک ذره نیز می تواند رخ دهد، که برای مثال در پدیده جایگزینی دینامیکی [۲۱] و تخریب همدوس تونل زنی نشان داده شده است [۲۲].

در سال های کنونی گذار فاز کوانتومی دینامیکی دانش ما از گذار فاز سامانه های دور از تعادل را به صورت قابل توجهی افزایش داده است [۳۲-۲۳]. در توصیف دینامیک یک سامانه کوانتومی که از حالت تعادل خارج شده است، یکی از کمیت های مهم انرژی آزاد دینامیکی است که میزان هم پوشانی حالت کوانتومی اولیه و تحول زمانی یافته آن را می سنجد [۳۵-۳۳]. در پژوهش های نظری بسیاری، نشان داده شده است که انرژی آزاد دینامیکی نقش مهمی در مشخص کردن اثر دینامیک غیر تعادلی در گذار فاز دینامیکی دارد [۲۳]. ایده گذار فاز دینامیکی از تشابه دامنه لاشمیت با تابع پارش مرزی نشأت می گیرد که در نتیجه آن تکنیکی های چگالی انرژی آزاد دینامیکی در حد ترمودینامیکی را می توان در زمان های بحرانی یافت که مشابه با صفرهای فیشر هستند [۳۶]. گذار فاز کوانتومی دینامیکی در سیستم های مختلفی از جمله مدل آیزینگ با میدان عرضی [۲۳]، مدل XY ناهمسانگرد [۳۸، ۳۷]، مدل های انتگرال پذیر [۳۹، ۴۰] و انتگرال ناپذیر [۳۸، ۳۹، ۴۱] مورد بررسی

و تایید قرار گرفته است. علاوه بر این، چنین مطالعاتی به سامانه‌های بیش از یک بعد [۴۲]، کمیت نظم توپولوژیکی دینامیکی [۴۳] و دگرگونی تدریجی [۴۴] نیز تعمیم داده شده است. چنین رفتارهای غیرتحلیلی را می‌توان در ساده‌ترین الگوی فیزیک حالت جامد، یعنی الگوی تنگابست^۱ یک‌بعدی نیز مشاهده کرد که در آن اعمال دگرگونی کوانتومی، منجر به رفتار غیرمعمول در سامانه می‌شود [۴۵]. نشان داده شده است که الگوی تنگابست باوجود سادگی، دارای کاربردهای گسترده‌ای از جمله در بررسی دینامیک اتم‌های فوق‌سرد در حضور امواج نور ایستاده [۴۶] در ابرشبکه‌های کیفیت بالا [۴۷] و یا در بلورهای نازک [۴۸] است.

بنابراین، با توجه به کاربردهای الگوی تنگابست، بررسی گذار فاز کوانتومی دینامیکی آن در حضور میدان الکتریکی می‌تواند به ما در شناخت بیشتر رفتار این سامانه در حالت غیرتعادلی کمک کند. در این مقاله تحول زمانی تابع موج در یک شبکه تنگابست یک‌بعدی که در میدان الکتریکی DC و AC قرار دارد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ابتدا هامیلتونی الگوی تنگابست و حل تحلیلی معادله شرودینگر وابسته به زمان مربوطه ارائه می‌شود. سپس رفتار دینامیکی غیرتحلیلی سامانه با استفاده از بررسی واگرایی انرژی آزاد دینامیکی و برای سه حالت مختلف میدان الکتریکی یعنی AC, DC و AC+DC مورد مطالعه قرار داده می‌شود.

۲. الگوی تنگابست

هامیلتونی زنجیره تنگابست یک‌بعدی با شرط مرزی تناوبی در حضور میدان الکتریکی خارجی به شکل زیر داده می‌شود:

$$H = J \sum_{n=0}^{N-1} (|n\rangle\langle n-1| + |n+1\rangle\langle n|) + eE(t)a \sum_n n |n\rangle\langle n| \quad (1)$$

که در آن $|n\rangle$ حالت وانیر^۲ در موقعیت n در شبکه با N سایت، J ضریب جنبش بین نقاط زنجیره در همسایگی هم در شبکه، a فاصله بین دو نقطه شبکه یا به عبارتی ثابت شبکه و e بار الکتریکی است که در اینجا همه عدد واحد فرض می‌شوند. میدان الکتریکی خارجی نیز با $E(t)$ نشان داده شده است.

¹ Tight-binding Model

² Wannier state



حل کلی معادله شرودینگر $i\partial_t |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$ با قراردادن تابع حالت وابسته به زمان $|\psi(t)\rangle = \sum_m C_m(t) |m\rangle$ در آن و نوشتن معادله حرکت برای ضرایب بسط تابع زمان $C_m(t) = \langle m | \psi(t) \rangle$ به صورت زیر بدست می آید:

$$i \frac{d}{dt} C_m(t) = J(C_{m+1}(t) + C_{m-1}(t)) + mE(t)C_m(t). \quad (2)$$

معادله دیفرانسیل فوق دارای حل تحلیلی است و $C_m(t)$ با رابطه [۴۵]،

$$C_m(t) = \sum_n (-1)^{m-n} C_n(0) e^{-i\eta(t)n} J_{m-n} \left(\sqrt{J} \sqrt{U^\dagger(t) + V^\dagger(t)} \right) \left[\frac{iV(t) - U(t)}{iV(t) + U(t)} \right]^{\frac{m-n}{2}}, \quad (3)$$

داده می شود، که در آن $J_{m-n}(x)$ تابع بسل مرتبه $(m-n)$ ام نوع اول است و

$$U(t) = \int_0^t \cos(\eta(t) - \eta(t')) dt', \quad V(t) = \int_0^t \sin(\eta(t) - \eta(t')) dt' \quad (4)$$

که در آن، $\eta(t) = \int_0^t E(t') dt'$ تعریف می شود. این جواب برای هر حالت اولیه اختیاری $|\psi(0)\rangle$ و هر میدان الکتریکی تابع زمان دلخواه $E(t)$ معتبر است. برای سادگی و بدون از دست دادن کلیت راه حل، فرض می شود که در حالت اولیه $|\psi(t=0)\rangle$ تنها یکی از نقاط شبکه وانییر، مثلاً n_0 ، اشغال شده باشد. پس $|\psi(0)\rangle = |n_0\rangle$ و $n_0 = 0$ قرار داده می شود و بنابراین $C_0(0) = 1$ خواهد بود. در این صورت احتمال اینکه بعد از تحول زمانی t ، هر نقطه دیگر شبکه مانند m اشغال شده باشد با رابطه،

$$\rho_m(t) = |C_m(t)|^2 = J_m^\dagger \left(\sqrt{J} \sqrt{u^\dagger(t) + v^\dagger(t)} \right), \quad (5)$$

داده می شود، که در آن از تساوی $U^\dagger + V^\dagger = u^\dagger + v^\dagger$ استفاده شده است با این تعریف که:

$$u(t) = \int_0^t dt' \cos \eta(t'), \quad v(t) = \int_0^t dt' \sin \eta(t'). \quad (6)$$

ما در اینجا به مشخص کردن دامنه لاشمیت^۱ (LA) علاقمندیم که میزان همپوشانی سامانه تحول یافته با حالت اولیه آن را مشخص می کند که بر اساس فرض ما حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |n_0\rangle = |0\rangle$ در نظر گرفته شده است. در نتیجه دامنه لاشمیت به صورت زیر نوشته می شود:

$$L(t) = \rho_{m=0}(t) = J_0^\dagger \left(\sqrt{J} \sqrt{u^\dagger(t) + v^\dagger(t)} \right). \quad (7)$$

¹ Loschmidt amplitude

با استفاده از دامنه لاشمیت می‌توان انرژی آزاد دینامیکی را به صورت

$$g(t) = -\lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) |\ln(L(t))|$$

تعریف کرد. بنابراین برای بررسی رفتار دینامیکی غیرتحلیلی سامانه (واگرا شدن انرژی آزاد دینامیکی) باید زمان‌های بحرانی که در آن تابع دامنه لاشمیت صفر می‌شود مشخص گردد.

در حالت ویژه که میدان الکتریکی وجود ندارد، خواهیم داشت $u(t) = t$ و $v(t) = 0$ که در نتیجه احتمال به صورت $\rho_m(t) = J_m^{-1}(2tJ)$ بدست می‌آید. در این حالت، با گذر زمان، تابع بسل به صفر میل می‌کند.

۳. اعمال میدان الکتریکی

میدان الکتریکی می‌تواند ترکیبی از بخش مستقل زمان، یا به عبارتی میدان DC، و بخش وابسته به زمان تناوبی، یا به عبارتی میدان AC باشد. در ادامه سه حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد: میدان الکتریکی صرفاً مستقل از زمان، میدان الکتریکی صرفاً تناوبی و میدان الکتریکی شامل هر دو جزء.

۱.۳. میدان الکتریکی مستقل از زمان DC

در حضور میدان الکتریکی ثابت $E(t) = E_0$ ، خواهیم داشت $u(t) = \sin(E_0 t) / E_0$ و $v(t) = (1 - \cos(E_0 t)) / E_0$ که در نتیجه تابع دامنه لاشمیت به صورت زیر بدست می‌آید:

$$L(t) = J_0^{-1} \left(\frac{4J}{E_0} \sqrt{\sin^2 \left(\frac{E_0 t}{2} \right)} \right) \quad (8)$$

شناسه تابع بسل بالا محدود است و حول زمان نوسان می‌کند. به منظور بررسی رفتار غیرتحلیلی انرژی آزاد دینامیکی باید زمان‌هایی که در آن دامنه لاشمیت صفر می‌شود را بیابیم. خواهیم داشت:

$$L(t^*) = 0 \rightarrow \frac{4J}{E_0} \sin \left(\frac{E_0 t^*}{2} \right) = x_0^{(n)} \rightarrow \sin \left(\frac{E_0 t^*}{2} \right) = \frac{E_0 x_0^{(n)}}{4J}, \quad (9)$$

که در آن، $x_0^{(n)}$ ، n -امین صفر تابع بسل مرتبه صفر، J_0 ، است. از آنجا که دامنه تابع سینوسی محدود است باید داشته باشیم:

$$\frac{E_0 |x_0^{(n)}|}{4J} \leq 1 \rightarrow E_0 \leq \frac{4J}{|x_0^{(n)}|}. \quad (10)$$



با توجه به اینکه کمینه مقدار $|x_o^{(n)}|$ برابر با $2/4048$ است، بنابراین، شرط لازم برای وجود واگرایی در انرژی آزاد دینامیکی در حضور میدان الکتریکی ثابت این است که بزرگی میدان الکتریکی کمتر از مقدار حدی $E_o \leq 1/66J$ باشد که با فرض $J=1$ ، واگرایی در زمان‌های:

$$t^* = \begin{cases} \frac{2}{E_o} \left(\pi l + \sin^{-1} \left(\frac{E_o |x_o^{(n)}|}{4} \right) \right) \\ \frac{2}{E_o} \left(\pi(l+1) - \sin^{-1} \left(\frac{E_o |x_o^{(n)}|}{4} \right) \right), \end{cases} \quad (11)$$

رخ می‌دهد که در آن $l = 0, 1, 2, \dots$ است.

بنابراین برای یک $x_o^{(n)}$ مشخص، به ازای هر l ، دو زمان بحرانی وجود دارد که انرژی آزاد دینامیکی رفتار غیرتحلیلی نشان می‌دهد. برای مثال اگر $E_o = 1/6$ باشد زمان‌های مورد نظر عبارتند از $t^* = 1/61, 2/31$ که این حالت در شکل (۱-الف) و با رسم انرژی آزاد دینامیکی نیز مشخص شده است. هرچه میدان الکتریکی ضعیف‌تر باشد آنگاه $x_o^{(n)}$ ‌های بیشتری در شرط (۱۰) صدق می‌کنند و در نتیجه مجموعه زمان‌های بحرانی دیگری مطابق با رابطه (۱۱) وجود خواهند داشت که در آن‌ها انرژی آزاد دینامیکی واگرا می‌شود. در شکل (۱-ب) و (۱-ج) انرژی آزاد دینامیکی برای میدان‌های بزرگتر از مقدار حدی و میدانی ضعیف‌تر نیز رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در میدان قوی‌تر از میدان حدی، واگرایی در انرژی آزاد دینامیکی دیده نمی‌شود و از سوی دیگر در همه شکل‌ها رفتار تناوبی وجود دارد که طبق رابطه (۸) زمان تناوب با $T = 2\pi/E_o$ داده می‌شود.

همچنین مشابه با گذار فاز در حالت تعادل، یکی از چالش‌های مهم در مورد گذار فاز دینامیکی کوانتومی بررسی وجود جهان‌شمولی^۱ و مقیاس‌پذیری^۲ است. مطابق با شکل (۲) انرژی آزاد دینامیکی $g(t)$ ، مقیاس‌پذیری قاعده‌توانی در نزدیکی زمان بحرانی به صورت

$$|g(t) - g(t^*)| \propto |(t - t^*)/t^*|^\nu$$

نشان می‌دهد که در آن $\nu = 1$ است [۲۴].

¹ Universality

² Scaling

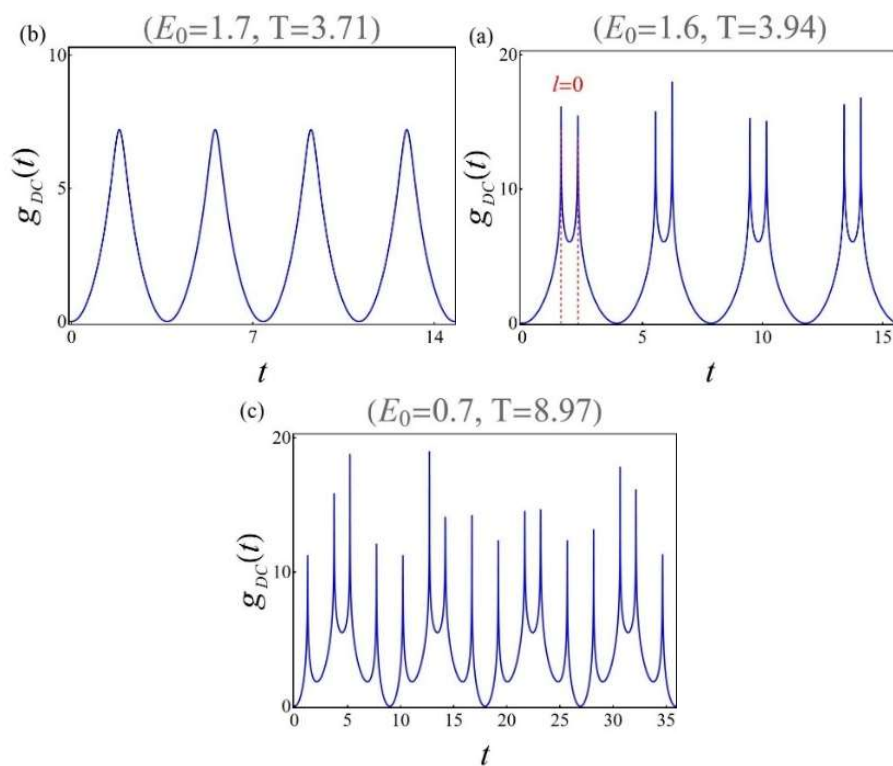


Fig. 1 Time evolution of dynamic free energy in DC field. (a) $E_0 = 1.6$ (b)

$E_0 = 1.7$ and (c) $E_0 = 0.7$ for $J = 1$

شکل ۱ تحول زمانی انرژی آزاد دینامیکی در حضور میدان DC. (الف) $E_0 = ۱/۶$ ، (ب) $E_0 = ۱/۷$ و (ج) $E_0 = ۰/۷$ با فرض $J = ۱$.



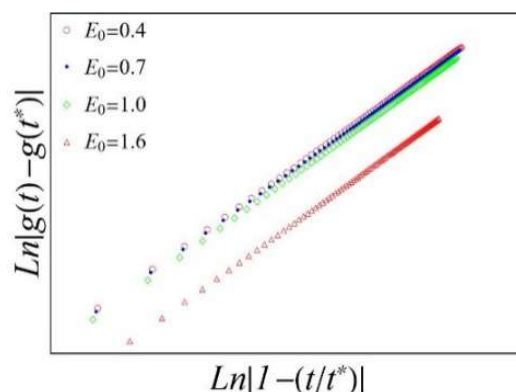


Fig. 2 Scaling of dynamical free energy in the vicinity of critical time t in the presence of static electric field.

شکل ۲ مقیاس پذیری انرژی آزاد دینامیکی در همسایگی زمان بحرانی t^* در حضور میدان الکتریکی ایستا (DC).

۲.۳. میدان الکتریکی تابع زمان تناوبی AC

در این بخش الگوی تنگابست در حضور میدان الکتریکی تابع زمان تناوبی به صورت $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ در نظر گرفته می شود که در حقیقت، نوعی سامانه فلوکه واداشته^۱ با دوره تناوب $T = 2\pi/\omega$ است. با این فرض خواهیم داشت:

$$u(t) = \int_0^t dt' \cos\left(\frac{E_0}{\omega} \sin \omega t'\right) = \frac{2}{\omega} \sum_{k=1}^{+\infty} J_{2k}\left(\frac{E_0}{\omega}\right) \frac{\sin(2k\omega t)}{2k} + J_0\left(\frac{E_0}{\omega}\right) t$$

$$v(t) = \int_0^t dt' \sin\left(\frac{E_0}{\omega} \sin \omega t'\right) = \frac{2}{\omega} \sum_{k=0}^{+\infty} J_{2k+1}\left(\frac{E_0}{\omega}\right) \frac{1 - \cos((2k+1)\omega t)}{(2k+1)}.$$
(۱۲)

با جای گذاری روابط بالا در معادله (۵) می توان دامنه لاشمیت و پس از آن انرژی آزاد دینامیکی را محاسبه کرد.

در حالت کلی با استفاده از روش های عددی می توان زمان های واگرا شدن انرژی آزاد دینامیکی را مشخص کرد. برای نمونه در شکل (۳-الف) انرژی آزاد دینامیکی برای $E_0 = 0.35$, $\omega = 0.5$ رسم شده است. با این حال برخی از این زمان ها را می توان به صورت تحلیلی نیز مشخص کرد. برای مثال در دوره های تناوبی $t^* = 2\pi\ell / \omega$ ($\ell = 1, 2, 3, \dots$) داریم:

¹ Driven Floquet system

$$u(t^*) = J_0(E_1/\omega)t^*, \quad v(t^*) = 0, \quad (13)$$

که در نتیجه تابع دامنه لاشمیت به صورت زیر ساده می شود:

$$L(t^*) = J_0 \left(\sqrt{t^*} J_0(E_1/\omega) \right). \quad (14)$$

مشابه با بخش قبل، ما به دنبال مشخص کردن شرطی هستیم که تابع دامنه لاشمیت صفر و بنابراین انرژی آزاد دینامیکی واگرا شود.

$$J_0 \left(\sqrt{t^*} J_0(E_1/\omega) \right) = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{t^*}}{\omega} J_0(E_1/\omega) = \pm |x_0^{(n)}|. \quad (15)$$

از طرفی با توجه به این که $|J_0(x)| \leq 1$ است، باید داشته باشیم:

$$|J_0(E_1/\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{t^*}} |x_0^{(n)}| \leq 1 \quad (16)$$

از آنجا که مقدار l می تواند به دلخواه بزرگ باشد، شرط بالا همواره برآورده می شود. بنابراین با فرض معلوم بودن ω (E_1) می توان مقادیر $E_1(\omega)$ که منجر به واگرا شدن انرژی آزاد دینامیکی می شوند را مشخص کرد. برای مثال، با فرض $\omega = 1$ ، میدان $E_1 = 1/63$ در صورتی که $l = 1$ باشد برای $x_0^{(n=2)}$ شرط بالا را برآورده می کند که در نتیجه زمان بحرانی $t^* = 6/28$ بدست می آید. شکل (۳-ب) که به روش عددی رسم شده است، در این زمان واگرایی نشان می دهد.



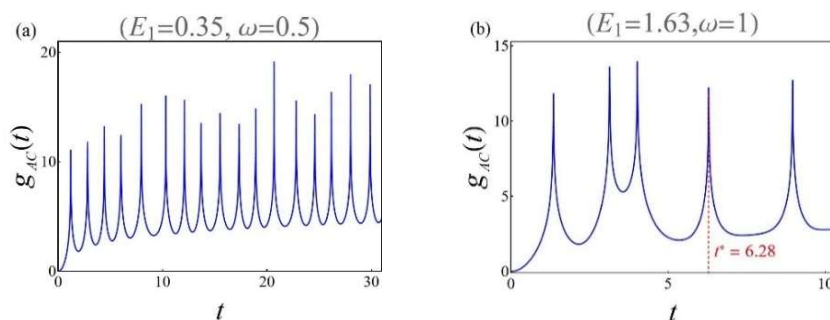


Fig. 3 (a) Dynamical free energy in the presence of periodic field for amplitude $E_1 = 0.35$ and frequency $\omega = 0.5$. (b) Confirming the existence of divergence in the dynamical free energy at $t^* = 6.28$ for $E_1 = 1.63$ and $\omega = 1$.

شکل ۳ (الف) انرژی آزاد دینامیکی در حضور در حضور میدان تناوبی با دامنه $E_1 = 0.35$ و بسامد زاویه‌ای $\omega = 0.5$ و (ب) تایید وجود واگرایی در انرژی آزاد دینامیکی در زمان $t^* = 6.28$ برای $E_1 = 1.63$ ، $\omega = 1$.

۳.۳. میدان الکتریکی AC+DC

در وضعیتی که هر دو جزء میدان الکتریکی روشن هستند، یعنی $E(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega t)$ ، خواهیم داشت:

$$u(t) = \int_0^t dt' \cos\left(E_0 t' + \frac{E_1}{\omega} \sin \omega t'\right), \quad v(t) = \int_0^t dt' \sin\left(E_0 t' + \frac{E_1}{\omega} \sin \omega t'\right), \quad (17)$$

پس از انجام عملیات جبری می‌توان معادلات (۱۸) و (۱۹) را بدست آورد که در آن‌ها از $\alpha = E_0/\omega$ و $\beta = E_1/\omega$ استفاده شده است.

$$u(t) = \frac{\sin(E_0 t)}{E_0} J_0(\beta) + \sum_{k=1}^{+\infty} J_k(\beta) \left[(-1)^k \frac{\sin(\alpha - k)\omega t}{(\alpha - k)\omega} + \frac{\sin(\alpha + k)\omega t}{(\alpha + k)\omega} \right] \quad (18)$$

$$v(t) = \frac{1 - \cos(E_0 t)}{E_0} J_0(\beta) + \sum_{k=1}^{+\infty} J_{\tau k}(\beta) \frac{\alpha - \alpha \cos(E_0 t) \cos(\tau k \omega t) - \tau k \sin(E_0 t) \sin(\tau k \omega t)}{\alpha^2 - \tau k^2} \\ + \sum_{k=0}^{+\infty} J_{\tau k+1}(\beta) \frac{-(\tau k + 1) + (\tau k + 1) \cos(E_0 t) \cos((\tau k + 1)\omega t) + \alpha \sin(E_0 t) \sin((\tau k + 1)\omega t)}{\alpha^2 - (\tau k + 1)^2} \quad (19)$$

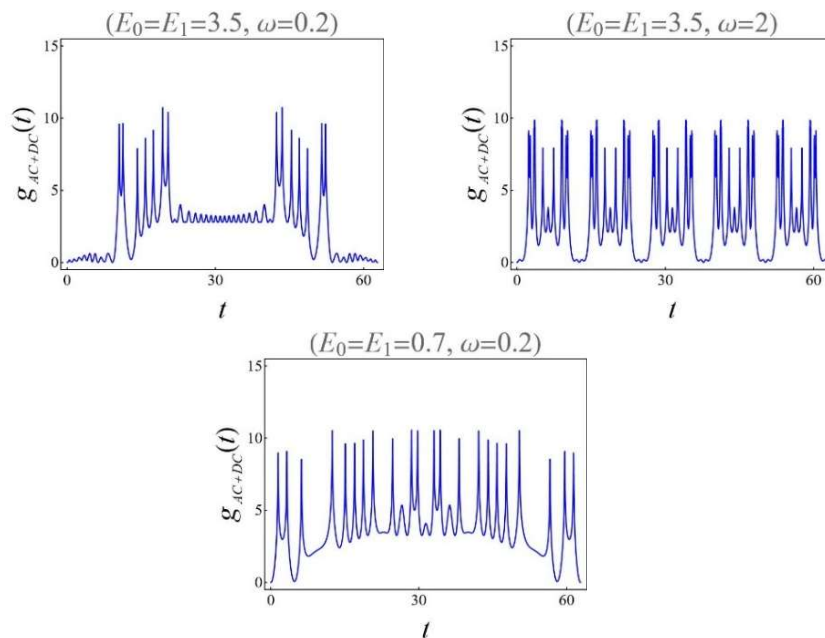


Fig. 4 Dynamical free energy in the presence of AC+DC field for various fields and frequencies.

شکل ۴ انرژی آزاد دینامیکی در حضور میدان AC+DC برای مقادیر مختلف میدان‌ها و بسامدها.

به دلیل پیچیدگی معادلات، به صورت کلی، تنها با روش‌های عددی می‌توان رفتار سامانه را مورد بررسی قرار داد؛ و البته در حالتی که α عدد صحیح زوج و یا فرد باشد روابط ساده‌تر می‌شوند [۷۳]. با این حال برخی از رفتارهای انرژی آزاد دینامیکی قابل تحلیل و پیش‌بینی است. در شکل (۴)، نمودارهای مربوط به انرژی آزاد دینامیکی برای حالتی که در آن میدان‌های AC و DC دارای بزرگی یکسانی هستند، $E_0 = E_1$ برخی از مقادیر E_0 ، E_1 و ω رسم شده‌اند.

همانطور که مشاهده می‌شود، انرژی آزاد دینامیکی در اینجا نیز رفتار تناوبی دارد که می‌توان دوره این تناوب را به صورت تحلیلی مشخص کرد. با توجه به رابطه (۵) و طبق معادلات (۱۸) و (۱۹) شرط تکرار رفتار دوره‌ای این است که روابط $\omega t = 2\pi l'$ و $E_0 t = 2\pi l$ همزمان برقرار باشند، که در آن l, l' اعداد طبیعی هستند. در این صورت خواهیم داشت: $\omega/E_0 = l'/l$.

از این رو، با دانستن مقادیر E_0 و ω تنها کافی است کوچکترین مقادیر l, l' ممکن را بیابیم که در تساوی بالا صدق می‌کنند. برای مثال، برای $\omega = 0.2$ و $E_0 = 0.7$ داریم: $\omega/E_0 = 0.2/0.7 = 2/7 = l'/l$ در نتیجه دوره تناوب تابع انرژی آزاد دینامیکی $T \approx 62/8$



بدست می آید. همچنین می توان نوشت $T = 2\pi l/E_0$ و از آنجا که l ضریب صحیحی از E_0 است بنابراین در حالت کلی خواهیم داشت $T = 2\pi n$ ، که در آن n با توجه به مطالب گفته شده مشخص می شود. لازم به بیان است که این دوره تناوب مستقل از بزرگی میدان تناوبی E_0 است. ویژگی دیگری که می توان آن را به صوت تحلیلی نشان داد این است که انرژی آزاد دینامیکی تحت تبدیل وارونی-زمان $t \rightarrow 2T - t$ ناوردا است.

۴. نتیجه گیری

در این مقاله دینامیک شبکه تنگابست یک بعدی متناهی با شرایط مرزی تناوبی در حضور میدان الکتریکی مورد بررسی قرار داده شد. به این منظور، سه نوع میدان، تنها ثابت، تنها تناوبی و در نهایت میدان شامل هر دو بخش ثابت و تناوبی جداگانه در نظر گرفته شد. مشاهده شد، هنگامی که سامانه در میدان الکتریکی ثابت E_0 قرار دارد با بهره مندی از حل تحلیلی در ابتدا می توان شرط وجود گذار فاز را به صورت $E_0 \leq 1/66J$ بدست آورد و سپس زمان های بحرانی گذارفاز دینامیکی سامانه را نیز پیش بینی نمود. در حالتی که میدان الکتریکی صرفاً تناوبی سامانه را تحریک می کند، مشخص کردن تحلیلی همه زمان های گذار فاز امکان پذیر نیست و باید از روش های عددی بهره جست. اما با اینحال نشان دادیم که چگونه مجموعه ای از زمان های بحرانی قابل تعیین به صورت تحلیلی هستند. در حضور هر دو میدان ثابت و تناوبی روابط پیچیده هستند و تنها با روش های عددی و رسم تابع انرژی آزاد دینامیکی قادر به مشخص کردن زمان های گذار هستیم. اما در این حالت نیز می توان چند ویژگی رفتار تابع انرژی آزاد دینامیکی را مشخص کرد. اول اینکه، نشان داده شد دوره تناوب انرژی آزاد دینامیکی با استفاده از نسبت E_0/ω قابل تعیین است و بزرگی دوره تناوب مستقل از دامنه بخش تناوبی میدان الکتریکی E_0 است. دوم اینکه می توان به صورت تحلیلی نشان داد که انرژی آزاد دینامیکی تحت تبدیل وارونی-زمان $t \rightarrow 2T - t$ ($T = 2\pi/\omega$) ناوردا است. همچنین در حالتی که دامنه میدان تناوبی با بزرگی میدان ثابت برابر باشد و با شرط $E_0 \leq 1/66J$ ، انرژی آزاد دینامیکی، مستقل از مقدار ω ، همواره واگرایی نشان می دهد. این نکته قابل بیان است که محدودیت اندازه سامانه تغییر چندانی در رفتار انرژی آزاد دینامیکی ایجاد نمی کند، مگر اینکه ارتفاع قله ها در انرژی آزاد دینامیکی کاهش یابد، ولی وجود بی نظمی می تواند زمان گذارفاز دینامیکی و دوره تناوب آن را تغییر دهد. همچنین توجه به اینکه گذارفاز دینامیکی بر اساس تکینگی

¹ Time reversal

انرژی آزاد دینامیکی، که خود همپوشانی بین دو تابع موج است، تعریف می‌شود، با تغییر عدد اشغال یا سطح انرژی فرمی انتظار تغییر ویژه‌ای در نتایج نداریم، بجز اینکه امکان دارد زمان گذار فاز دینامیکی تغییر کند.

منابع

- [1] Dirac, P.A.M., "Bakerian lecture-the physical interpretation of quantum mechanics", *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 180(980), 1-40, 1942. <https://doi.org/10.1098/rspa.1942.0023>
- [2] Bender, C.M. and Boettcher, S., "Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having P T symmetry", *Physical review letters* 80(24), 5243, 1998. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.5243>
- [3] Bender, C.M., Brody, D.C. and Jones, H.F., "Complex extension of quantum mechanics" *Physical review letters* 89(27), 270401, 2002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.270401>
- [4] Bender, C.M., "Making sense of non-Hermitian Hamiltonians" *Reports on Progress in Physics* 70(6), 947, 2007. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/70/6/R03>
- [5] Ashida, Y., Gong, Z. and Ueda, M., "Non-hermitian physics", *Advances in Physics* 69(3), 249-435, 2020. <https://doi.org/10.1080/00018732.2021.1876991>
- [6] Lee, T.E., "Anomalous edge state in a non-Hermitian lattice", *Physical review letters* 116(13), 133903, 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.133903>
- [7] Longhi, S., "Topological Phase Transition in non-Hermitian Quasicrystals", *Phys. Rev. Lett.*, 122, 237601, 2019. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.237601>
- [8] Longhi, S., "Phase transitions in a non-Hermitian Aubry-André-Harper model", *Phys. Rev. B*, 103, 054203, 2021. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.054203>
- [9] Yao, S., Song, F., and Wang, Z., "Non-Hermitian Chern Bands", *Phys. Rev. Lett.*, 121, 136802, 2018. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.136802>
- [10] Yang, Z., Zhang, K., Fang, C., and Hu, J., "Non-Hermitian Bulk-Boundary Correspondence and Auxiliary Generalized Brillouin Zone Theory", *Phys. Rev. Lett.*, 125, 226402, 2020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.226402>
- [11] Lee, C. H. and Thoma, R., "Anatomy of skin modes and topology in non-Hermitian systems", *Phys. Rev. B*, 99, 201103, 2019. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.99.201103>
- [12] Liu, Y., Wang, Y., Zheng, Z., and Chen, S., "Non-Hermitian mobility edges in one-dimensional quasicrystals with parity-time symmetry", *Phys. Rev. B*, 103, 134208, 2021. <https://doi.org/10.1007/s11433-0211802-4>
- [13] Helbig, T., Hofmann, T., Imhof, S., Abdelghany, M., Kiessling, T., Molenkamp, L., Lee, C., Szameit, A., Greiter, M., and Thomale, R., "Generalized bulk-boundary correspondence in non-Hermitian topoelectrical circuits", *NAT. Phys.*, 16, 747, 2020. <https://doi.org/10.1038/s41567-020-09229>
- [14] Zhang, X-X. and Franz, M., "Non-Hermitian Exceptional Landau Quantization in Electric Circuits", *Phys. Rev. Lett.*, 124, 046401, 2020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.046401>
- [15] Schomerus, H., "Topologically protected midgap states in complex photonic lattices", *Opt. Lett.*, 38, 1912, 2013. <https://doi.org/10.1364/ol.38.001912>



- [16] Liang, Q., Xie, D., Dong, Z., Li, H., Li, H., Gadway, B., Yi W., and Yan, B., "Dynamic Signatures of Non-Hermitian Skin Effect and Topology in Ultracold Atoms", *Phys. Rev. Lett.*, 129, 070401, 2022. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.070401>.
- [17] Li, J., Harter, A. K., Liu, J., de Melo, L., Joglekar, Y. N. and Luo, L., "Observation of parity-time symmetry breaking transitions in a dissipative Floquet system of ultracold atoms", *Nat. Commun.*, 10, 855, 2019. <https://doi.org/10.1038/s41467-019-08596-1>.
- [18] Weidemann, S., Kremer, M., Helbig, T., Hofmann, T., Stegmaier, A., Greiter, M., Thomale, R., and Szameit, A., "Topological funneling of light", *Science*, 368, 311, 2020. <https://doi.org/10.1126/science.aaz8727>.
- [19] Zhang, W., Ouyang, X., Huang, X., Wang, X., Zhang, H., Yu Y., Chang, X., Liu, Y., Deng, D-L., and Duan, L-M., "Observation of Non-Hermitian Topology with Nonunitary Dynamics of Solid-State Spins", *Phys. Rev. Lett.*, 127, 090501, 2021. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.090501>.
- [20] Akulin, V. M., "Coherent Dynamics of Complex Quantum Systems", *Springer-Verlag, Berlin*, 2006.
- [21] Dunlap, D. H. and Kenkre, V. M., "Dynamic localization of a charged particle moving under the influence of an electric field", *Phys. Rev. B*, 34, 3625, 1986. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.34.3625>.
- [22] Grossmann, F., Dittrich, T., Jung, P., and Hänggi, P., "Coherent destruction of tunneling", *Phys. Rev. Lett.*, 67, 516, 1991. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.516>.
- [23] Heyl, M., Polkovnikov, A., and Kehrein, S., "Dynamical Quantum Phase Transitions in the Transverse-Field Ising Model", *Phys. Rev. Lett.*, 110, 135704, 2013. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.135704>.
- [24] Heyl, M., "Scaling and Universality at Dynamical Quantum Phase Transitions", *Phys. Rev. Lett.*, 115, 140602, 2015. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.140602>.
- [25] Budich, J. C. and Heyl, M., "Dynamical topological order parameters far from equilibrium", *Phys. Rev. B*, 93, 085416, 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.085416>.
- [26] Huang, Z. and Balatsky, A. V., "Dynamical Quantum Phase Transitions: Role of Topological Nodes in Wave Function Overlaps", *Phys. Rev. Lett.*, 117, 086802, 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.086802>.
- [27] Zamani, S., Naji, J., Jafari, R., Langari, A., "Scaling and universality at ramped quench dynamical quantum phase transitions", *J. Phys. Condens. Matter*, 36, 355401, 2024. <https://doi.org/10.1088/1361-648X/ad4df9>.
- [28] Ansari, S., Akbari, A., Jafari, R., "Dynamics of steered quantum coherence and magic resource under sudden quench", *Quantum Inf. Process.* 23, 212, 2024. <https://doi.org/10.1007/s11128-024-04414-w>.
- [29] Jafari, R., Langari, A., Eggert, S., Johannesson, H., "Dynamical quantum phase transitions following a noisy quench", *Phys. Rev. B*, 109, 180303, 2024. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.109.L180303>.
- [30] Ansari, S. and Jafari, R., "One-dimensional p-wave superconductivity with long-range hopping and pairing", *Iran. J. Phys. Res.*, 21, 81, 2021. <https://doi.org/10.47176/ijpr.20.2.35211>. (in Persian)
- [31] Ansari, S. and Jafari, R., "Dynamical phase transition in n-cluster spin model", *Res. Many. Sys.*, 9, 29, 2019. <https://doi.org/10.22055/jrmbs.2019.14922>. (in Persian)
- [32] Jafari, R., "Quantum phase transition in the one-dimensional extended quantum compass model in a transverse field", *Phys. Rev. B*, 84, 035112, 2011. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.035112>.
- [33] Gorin, T., Prosen, T., Seligman, T. H., and Znidaric, M., "Dynamics of Loschmidt echoes and fidelity decay", *Phys. Rep.*, 435, 33, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.09.003>.

- [34] Quan, H. T., Song, Z., Liu, X. F., Zanardi, P., and Sun, C. P., "Decay of Loschmidt Echo Enhanced by Quantum Criticality", *Phys. Rev. Lett.*, 96, 140604, 2006. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.140604>.
- [35] Jafari, R. and Johannesson, H., "Loschmidt Echo Revivals: Critical and Noncritical", *Phys. Rev. Lett.*, 118, 015701, 2017. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.015701>.
- [36] Halimeh, J. C. and Zauner-Stauber, V., "Dynamical phase diagram of quantum spin chains with long-range interactions", *Phys. Rev. B*, 96, 134427, 2017. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.134427>.
- [37] Hickey, J. M., "Timescales, dynamical phase transitions and 3rd order phase transitions in the 1d anisotropic XY model", arXiv:1403.5515, 2014.
- [38] Vajna, S. and Dóra, B., "Disentangling dynamical phase transitions from equilibrium phase transitions", *Phys. Rev. B*, 89, 161105R, 2014. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.89.161105>.
- [39] Lang, J., Frank, B., and Halimeh, J. C., "Dynamical Quantum Phase Transitions: A Geometric Picture", *Phys. Rev. Lett.*, 121, 130603, 2018. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.130603>.
- [40] Jafari, R., Johannesson H., Langari, A., Martin-Delgado, M. A., "Quench dynamics and zero-energy modes: The case of the Creutz model", *Phys. Rev. B*, 99, 054302, 2018. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.99.054302>.
- [41] Sharma, S., Suzuki, S., and Dutta, A., "Quenches and dynamical phase transitions in a nonintegrable quantum Ising model", *Phys. Rev. B*, 92, 104306, 2015. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.92.104306>.
- [42] Schmitt, M. and Kehrein, S., "Dynamical quantum phase transitions in the Kitaev honeycomb model", *Phys. Rev. B*, 92, 075114, 2015. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.92.075114>.
- [43] Budich, J. C. and Heyl, M., "Dynamical topological order parameters far from equilibrium", *Phys. Rev. B*, 93, 085416, 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.085416>.
- [44] Sharma, S., Divakaran, U., Polkovnikov A., and Dutta A., "Slow quenches in a quantum Ising chain: Dynamical phase transitions and topology", *Phys. Rev. B*, 93, 144306, 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.144306>.
- [45] Peng, Y., Jie, J., Yu, D., and Wang, Y., "Manipulating non-Hermitian skin effect via electric fields", *Phys. Rev. B*, 106, 161402, 2022. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.106.L161402>.
- [45] Graham, R., Schlautmann, M., and Zoller, P., "Dynamical localization of atomic-beam deflection by a modulated standing light wave", *Phys. Rev. A*, 45, 19, 1992. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.R19>.
- [46] Waschke, C., Roskos, H., Schwedler, R., Leo, K., Kurz, H., Kohler, K., "Coherent submillimeter-wave emission from Bloch oscillations in a semiconductor superlattice", *Phys. Rev. Lett.*, 70, 3319, 1993. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.3319>.
- [47] Faisal, F. H. M. and Kaminski, J. Z., "Generation and control of high harmonics by laser interaction with transmission electrons in a thin crystal", *Phys. Rev. A*, 54, R1769, 1996. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.54.R1769>.



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

